Diánoia, vol. 20, no. 20, 1974

PROPIEDADES DEL RAZONAMIENTO POR ANALOGÍA

La analogía es una de las maneras más comunes de discurrir. Lo mismo en las conversaciones cotidianas, que al expresar nuestros sentimientos, al comunicar nuestras emociones y al dar curso libre a nuestras reflexiones, nos servimos continuamente de razonamientos por analogía. También en la creación artística y en la actividad científica utilizamos una gran variedad de analogías de diferentes tipos: simples o complejas, vagas o precisas, obvias u ocultas, directas o indirectas, oscuras o transparentes. Las imágenes, las ordenaciones, las trasposiciones y, en particular, la ejecución de inferencias por analogía, nos permiten formular descripciones comprensibles, establecer pautas de actividades posibles y construir esquemas explicativos. Los procedimientos analógicos son muy fecundos para inventar hipótesis plausibles que luego sometemos a la prueba de la experiencia, o bien, fundamentamos mediante razonamientos más estrictos. Por otra parte, la habilidad para descubrir analogías en los procesos existentes y en sus representaciones mentales, es sumamente valiosa para desarrollar la imaginación racional y para hacer avanzar el conocimiento. Además, debido a que una analogía nunca ocurre aisladamente, sino que está asociada con otras analogías, resulta que el establecimiento de relaciones análogas entre los elementos de ciertos conjuntos o entre acontecimientos escasamente estudiados, puede conducir a la formulación de conjeturas importantes. En fin, en muchos casos, el hallazgo de las analogías existentes constituye la primera de las etapas que se recorren en el camino que lleva al descubrimiento de lo desconocido, partiendo de algo conocido que sea análogo.

En su forma original, la analogía fue formulada por Pitágoras y algunos de sus discípulos,[1] determinándola como la igualdad de dos o más razones entre magnitudes, esto es, como una proporción en sentido matemático riguroso. Los mismos pitagóricos se encargaron de desarrollar la analogía, especialmente en la formulación que hicieron de la teoría de las proporciones, en conexión con la aritmética, la geometría, la armonía y la música. Entre las diversas aplicaciones que realizaron de la analogía a las magnitudes conmensurables, los pitagóricos encontraron la solución completa de la ecuación cuadrática general[2] y descubrieron muchas de las propiedades de las figuras geométricas semejantes. Platón prosiguió esos estudios de los pitagóricos, lle-

1 Thomas L. Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, Nueva York, Dover Publications, 1963, p. 54.

2 Esto es, la ecuación: $x^2 \pm pq \pm q = 0$.

gando a formular, entre otras cosas, las proporciones entre los números cuadrados y entre los números cúbicos.[3] Más tarde, Euxodo de Cnido, discípulo de Platón, escribió un tratado de las proporciones, que luego fue ordenado, sistematizado y formulado de manera demostrativa por Euclides. Dicho tratado fue generalizado para comprender también a las magnitudes incommensurables, quedando incorporado así, como Libro V, a los *Elementos* de Euclides. Por su parte, Aristóteles extendió la significación lógica de la analogía, estableciendo que la relación, razón o *logos* entre magnitudes o entre términos conceptuales, conduce a la proporción, simetría o *analogía* entre ellos.[4] Igualmente, distinguió con nitidez lo que es análogo, de aquello que es simplemente similar de un modo vago e impreciso. En particular, Aristóteles descubrió analogías entre los órganos de los animales y sus respectivas funciones, lo mismo que entre diversas propiedades de los cuerpos. Además, utilizó la proporción aritmética para establecer la analogía correctiva entre la justicia y la injusticia.[5]

En este artículo intentaremos establecer las bases para la formulación rigurosa del razonamiento por analogía y la determinación de sus propiedades. Empezaremos por precisar las características de las proporciones, como igualdades entre razones de magnitudes determinadas, ya sea como cantidades o como medidas. Luego examinaremos las transformaciones sucesivas que han sufrido dichas razones, hasta convertirse en relaciones cualitativas susceptibles de ser equiparadas analógicamente. De esa manera, mostraremos la superación dialéctica que se ha producido, mudando la proporción en una correspondencia estricta entre las relaciones más diversas. Paralelamente, nos referiremos también a las modalidades en que se ha desplegado la relación inicial de igualdad entre las razones, dando lugar a la identidad, la igualdad propiamente dicha, la congruencia, la proporción, la semejanza, la equivalencia, la ecuación, la desigualdad, la implicación y la analogía. Por último, nos ocuparemos de la conjugación de las analogías y de su correspondencia equipolente en el analogismo, para determinar así sus principales propiedades.

Empezaremos por formular algunas definiciones:

DEFINICIÓN I: Razón es cualquiera relación entre dos magnitudes del mismo género, según su cantidad.[6]

[3] Dichas proporciones son: $\frac{P^2}{PQ} = \frac{PQ}{Q^2}$, para los cuadrados; y: $\frac{P^3}{P^2Q} = \frac{P^2Q}{PQ^2} = \frac{PQ^2}{Q^3}$, para los cubos.

[4] Aristóteles, *Ética Nicomaquea,* libro V, capítulo 3.

[5] Aristóteles, *op. cit.*, libro V, capítulo 4.

[6] Euclides, *Elementos,* México, UNAM, versión al castellano de José Álvarez Laso, 1956, libro V, definición 3.

DEFINICIÓN II: Las magnitudes que tienen la misma razón se llaman proporcionales.[7]

DEFINICIÓN III: La proporción mínima es entre tres términos.[8]

DEFINICIÓN IV: Se llama aritmética a una proporción, cuando la diferencia entre el primer término y el segundo, es igual a la diferencia entre el segundo término y el tercero.[9]

DEFINICIÓN V: Se llama geométrica a una proporción, cuando el producto del primer término por el inverso del segundo, es igual al producto del segundo por el inverso del tercero.[10]

DEFINICIÓN VI: Una proporción es armónica, cuando la diferencia entre el inverso del primer término y el inverso del segundo, es igual a la diferencia entre el inverso del segundo y el inverso del tercero.[11]

DEFINICIÓN VII: En una razón, la primera magnitud se denomina antecedente y la segunda se llama consecuente. Por ende, en una proporción, el primero y el tercer términos son los antecedentes, en tanto que el segundo y el cuarto términos son los consecuentes respectivos de las razones.

DEFINICIÓN VIII: En una proporción, el primero y el cuarto términos se llaman extremos, mientras que el segundo y el tercero se denominan medios. Por consiguiente, en una proporción entre tres términos, únicamente existe un término medio, que se repite en las dos razones.

Entonces, de acuerdo con la Definición IV, la proporción aritmética entre tres términos, A, B, C, queda expresada así:

$$A - B = B - C.$$

Si pasamos el término B del primer miembro al segundo y el término C del segundo miembro al primero, tendremos expresada la proporción aritmética en otra forma:

$$A + C = 2B.$$

Ahora, partiendo de la primera expresión, podemos pasar el segundo miembro íntegro como divisor del primero y representar la unidad que resulta de esa operación en el segundo miembro, por alguna de las razones equivalentes a la propia unidad, como son: $\frac{A}{A}$, $\frac{B}{B}$, $\frac{C}{C}$, con lo cual obtendremos otra forma de expresar la proporción aritmética:

$$\frac{A - B}{B - C} = \frac{A}{A} = \frac{B}{B} = \frac{C}{C}.$$

[7] Euclides, *op. cit.*, libro V, definición 6.

[8] Euclides, *op. cit.*, libro V, definición 8.

[9] Definición de Arquitas; Heath, *op. cit.*, p. 51.

[10] También es definición de Arquitas; Heath, *op. cit.*, p. 51.

[11] Igualmente es definición de Arquitas; Heath, *op. cit.*, p. 51.

Por su parte, conforme a la Definición V, la proporción geométrica entre tres términos, *A, B, C,* se expresa de este modo:

$$\frac{A}{B}=\frac{B}{C}.$$

Si multiplicamos cada antecedente por el consecuente del otro miembro, obtendremos otra expresión de la proporción geométrica:

$$AC=B^2.$$

Y, ahora, haciendo uso de la razón entre las diferencias del primero al segundo término y del segundo al tercero, respectivamente, podemos igualar dicha razón a uno u otro miembro de la primera expresión, $\frac{A}{B}$, o $\frac{B}{C}$, con lo cual tendremos otra expresión de la proporción geométrica:

$$\frac{A-B}{B-C}=\frac{A}{B}=\frac{B}{C}.$$

En cuanto a la proporción armónica entre tres términos, *A, B, C,* de acuerdo con la Definición VI, se expresa así:

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{B}=\frac{1}{B}-\frac{1}{C}.$$

Si pasamos ahora el término $\frac{1}{B}$ del primer miembro al segundo, y el término $\frac{1}{C}$ del segundo miembro al primero, tendremos otra forma de expresar la proporción armónica:

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{C}=\frac{2}{B}.$$

Por último, utilizando la razón entre las diferencias del primero al segundo término y de éste al tercero, la podemos igualar con la razón $\frac{A}{C}$, con lo cual llegamos a otra expresión de la proporción armónica:

$$\frac{A-B}{B-C}=\frac{A}{C}.$$

Con las nueve expresiones anteriores podemos formar la tabla siguiente:

PROPORCIONES ENTRE TRES TÉRMINOS		
Aritmética	*Geométrica*	*Armónica*
$A - B = B - C$	$\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$	$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{B} - \frac{1}{C}$
$A + C = 2B$	$AC = B^2$	$\frac{1}{A} + \frac{1}{C} = \frac{2}{B}$
$\frac{A - B}{B - C} = \frac{A}{A} = \frac{B}{B} = \frac{C}{C}$	$\frac{A - B}{B - C} = \frac{A}{B} = \frac{B}{C}$	$\frac{A - B}{B - C} = \frac{A}{C}$

Como es fácil advertir, las expresiones tabuladas muestran la dualidad existente entre las tres clases de proporciones. En efecto, fijando nuestra atención en los dos primeros renglones de la tabla, tenemos que la operación de sustracción de la proporción aritmética, se convierte en división en la proporción geométrica,[12] mientras que la adición se transforma en multiplicación,[13] y el coeficiente se convierte en exponente.[14] Por otra parte, también se puede advertir que los términos de la proporción aritmética se transforman en sus respectivos inversos en la proporción armónica.[15] Además, atendiendo ahora al tercer renglón, tenemos que el primer miembro es común para las tres proporciones, en tanto que el segundo miembro ofrece tres alternativas para la proporción aritmética, dos para la geométrica y una sola para la proporción armónica.

En lo que se refiere a las proporciones entre cuatro términos, *A, B, C, D,*

PROPORCIONES ENTRE CUATRO TÉRMINOS		
Aritmética	*Geométrica*	*Armónica*
$A - B = C - D$	$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$	$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{C} - \frac{1}{D}$
$A + D = B + C$	$AD = BC$	$\frac{1}{A} + \frac{1}{D} = \frac{1}{B} + \frac{1}{C}$
$\frac{A - B}{C - D} = \frac{A}{A} = \frac{B}{B} = \frac{C}{C} = \frac{D}{D}$	$\frac{A - B}{C - D} = \frac{A}{C} = \frac{B}{D}$	$\frac{A - B}{C - D} = \frac{AB}{CD}$

[12] O sea, por definición $(A - B)$ se convierte en $\frac{A}{B}$, y $(B - C)$ en $\frac{B}{C}$.

[13] Por definición $(A + C)$ se transforma en AC.

[14] Al ejecutar la multiplicación, $2B$ se convierte en B^2.

[15] Es decir, por definición, A en $\frac{1}{A}$, B en $\frac{1}{B}$, C en $\frac{1}{C}$.

se pueden formular igualmente tres expresiones diferentes para cada clase, siempre con base en las Definiciones IV, V y VI, que son análogas a las establecidas para las proporciones entre tres términos, tal como se muestra en la tabla que aparece en la página anterior.

Es fácil ver que también aquí existe dualidad entre las tres clases de proporciones. Considerando los dos primeros renglones, tenemos que la sustracción de la proporción aritmética se transforma en división en la proporción geométrica, a la vez que la adición se convierte en multiplicación. Por otro lado, los términos de la proporción aritmética se transforman en sus inversos en la proporción armónica. Por lo demás, en el tercer renglón volvemos a tener un primer miembro común, en tanto que para la proporción aritmética existen cuatro alternativas, dos para la geométrica y una sola para la armónica. En fin, la última expresión de la proporción armónica muestra una notable dualidad interna, puesto que el numerador del primer miembro es la diferencia entre el primer término y el segundo, en tanto que el numerador del segundo miembro es el producto de esos mismos términos, y lo mismo sucede entre los denominadores de ambos miembros, con respecto al tercero y el cuarto términos de la proporción.

Las proporciones entre tres términos son siempre discretas, porque constan solamente de dos miembros:

$$A - B = B - C \qquad \text{(aritmética),}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} \qquad \text{(geométrica),}$$

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{B} - \frac{1}{C} \qquad \text{(armónica).}$$

En cambio, las proporciones entre cuatro términos pueden ser discretas, cuando sólo tienen dos miembros:

$$A - B = C - D \qquad \text{(aritmética),}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \qquad \text{(geométrica),}$$

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{C} - \frac{1}{D} \qquad \text{(armónica).}$$

Pero, también pueden ser continuas, cuando tienen más de dos miembros; en tal caso, en cada uno de ellos se va repitiendo un término del miembro anterior:

$$A - B = B - C = C - D = \ldots = L - M = M - N \qquad \text{(aritmética)},$$

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D} = \ldots = \frac{L}{M} = \frac{M}{N} \qquad \text{(geométrica)},$$

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{B} - \frac{1}{C} = \frac{1}{C} - \frac{1}{D} = \ldots = \frac{1}{L} - \frac{1}{M} = \frac{1}{M} - \frac{1}{N} \qquad \text{(armónica)}.$$

O bien, las proporciones entre cuatro términos pueden ser múltiples, cuando tienen más de dos miembros y los términos no se repiten:

$$A - B = C - D = E - F = \ldots = M - N \qquad \text{(aritmética)},$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F} = \ldots = \frac{M}{N} \qquad \text{(geométrica)},$$

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{C} - \frac{1}{D} = \frac{1}{E} - \frac{1}{F} = \ldots = \frac{1}{M} - \frac{1}{N} \qquad \text{(armónica)}.$$

La analogía existente entre los términos de una proporción aritmética continua y los términos de una proporción geométrica también continua, fue utilizada por Napier para inventar los logaritmos, estableciendo explícitamente la correspondencia biunívoca entre los términos de la proporción geométrica constituida por la serie de los números racionales positivos y la proporción aritmética formada por las potencias a las cuales es necesario elevar cada uno de esos números para obtener el número fijo que sirve como base de los logaritmos.[16] En efecto, si los números racionales: P, Q, R, S, T, U, ..., se encuentran en una proporción geométrica continua:

$$\frac{P}{Q} = \frac{R}{S} = \frac{T}{U} = \ldots,$$

entonces, sus correspondientes logaritmos: $\log P$, $\log Q$, $\log R$, $\log S$, $\log T$, $\log U$, ..., se encuentran por su parte en la proporción aritmética siguiente:

$$\log P - \log Q = \log R - \log S = \log T - \log U = \ldots$$

Como ya lo hemos dicho, en las proporciones entre tres términos, aquel que figura en ambos miembros se denomina término medio y su valor recibe

[16] *Mirifici logarithmorum canonis descriptio... Authore ac Inventore Ioanne Nepero, Barone Merchistonil, Ec. Scoto,* Edimburgo, 1614.

el nombre de media. Por lo tanto, despejando al término medio B en la expresión correspondiente a cada clase de proporción, encontramos sus valores respectivos. Así, para la media aritmética obtenemos el siguiente valor:

$$B = \frac{A + C}{2}.$$

Para la media geométrica, tenemos:

$$B = \sqrt{AC}.$$

Y, para la media armónica, resulta el valor siguiente:

$$B = \frac{2AC}{A + C}.$$

En lo que respecta a la proporción musical, tenemos que está constituida por la combinación de las tres clases de proporciones anteriores. En efecto, se trata de un caso particular de la proporción geométrica entre cuatro términos, en donde el segundo término es la media aritmética entre el primero y el cuarto, o sea:

$$B = \frac{A + D}{2};$$

en tanto que el tercer término es la media armónica entre esos mismos términos primero y cuarto, es decir:

$$C = \frac{2AD}{A + D}.$$

Por consiguiente, la expresión de la proporción musical es:

$$A : \frac{A + D}{2} = \frac{2AD}{A + D} : D.$$

La igualdad entre razones de la proporción geométrica ha experimentado un largo desarrollo dialéctico, a través del cual se ha venido a convertir en la correspondencia equipolente entre funciones, que constituye la base de la analogía en su connotación actual. En el curso de ese desarrollo, la igualdad ha sufrido varias transformaciones cuantitativas, y otras tantas cualitativas.

A la vez, las relaciones implicadas originalmente en la igualdad han sido generalizadas, con la consiguiente ampliación de las funciones susceptibles de ser analogadas con precisión. Los pitagóricos, que fueron los iniciadores del tratamiento sistemático de las proporciones, limitaron su aplicación a las magnitudes conmensurables, *i. e.*, a las que tienen una medida común. Después, con la teoría de la proporción formulada por Eudoxo y Euclides, su dominio de aplicación fue extendido tanto a las magnitudes inconmensurables como a otras magnitudes de tipo diferente a las numéricas, como son las longitudes, los ángulos, las áreas, los volúmenes y otras más.

En lo referente a la igualdad, sigue siendo válida la definición euclidiana que, por cierto, fue utilizada por Dedekind en su teoría de los irracionales y adoptada íntegramente por Weierstrass para definir la igualdad entre números.[17] Dicha definición la transcribimos aquí:

> Definición IX: Se dice que la razón de una primera magnitud a una segunda, es igual a la de una tercera a una cuarta, cuando la primera y la tercera igualmente multiplicadas, o al mismo tiempo superan, o al mismo tiempo son iguales, o al mismo tiempo son inferiores que la segunda y la cuarta igualmente multiplicadas.[18]

Por lo tanto, si en la proporción:

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D},$$

se multiplican los antecedentes A y C por un factor común m, y los consecuentes por otro factor común n, entonces existen tres alternativas para el resultado:

i) $mA > nB$, simultáneamente con: $mc > nD$;
ii) $mA = nB$, al mismo tiempo que: $mC = nD$; y,
iii) $mA < nB$, a la vez que: $mC < nD$.

Sin embargo, el desenvolvimiento de la matemática ha traído consigo una complejidad y una diversificación crecientes, en virtud de las cuales se ha llegado a advertir que la igualdad entre dos expresiones matemáticas puede llegar a tener un significado ambiguo, inclusive tratándose de expresiones numéricas. En efecto, en algunos casos, la igualdad se establece entre dos representaciones del mismo objeto; mientras que, en otros casos, se refiere a dos objetos que no son el mismo. Por ejemplo, en la expresión:

$$3+4=7,$$

17 Heath, *op. cit.*, p. 225.
18 Euclides, *op. cit.*, libro V, definición 5.

se entiende que "$3 + 4$" y "7" son el mismo número. En cambio, en la igualdad establecida entre dos figuras geométricas, digamos dos cuadrados, sabemos bien que cada cuadrado es un objeto diferente. Más todavía, en la expresión:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6},$$

las fracciones $\frac{\text{“}1\text{”}}{2}$ y $\frac{\text{“}3\text{”}}{6}$ no son la misma fracción, aunque sean consideradas como representaciones diferentes del mismo número racional, sino que se trata de dos expresiones equivalentes, es decir, que solamente tienen el mismo valor. Por otra parte, en las igualdades algebraicas también resulta indispensable hacer la distinción entre aquellas que se cumplen únicamente para ciertos valores de las variables y aquellas otras que tienen cumplimiento para cualesquiera valores de dichas variables. En el primer caso, tendremos una ecuación, como por ejemplo:

$$x^2 + x - 6 = 0,$$

que se cumple solamente para los valores $+2$ y -3 de la variable x. Se trata, por ende, de una igualación, o sea, de una igualdad condicionada. En el otro caso, tendremos una identidad, tal como la del siguiente ejemplo:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y),$$

que se cumple para todos los valores de las variables x e y.[19] Por lo tanto, se trata de una igualdad incondicionada. En consecuencia, ante la necesidad de distinguir con exactitud entre las diversas modalidades en que se ha desplegado la relación de igualdad, se han indagado rigurosamente las propiedades de cada una de ellas, hasta llegar a determinarlas con precisión.

La identidad se encuentra caracterizada entonces por seis propiedades fundamentales, que son: la coincidencia, la isodinamia, la reflexividad, la simetría, la transitividad por transferencia y la transitividad por equiparación, que se pueden formular así:

I.o *Coincidencia:* Si x e y son idénticos, entonces denotan uno y el mismo objeto, o bien, son objetos indiscernibles, es decir que:

$$x \equiv y.$$

[19] Aun en este caso, no obstante que se dice que tiene cumplimiento para cualesquiera valores de x e y, no se trata de una identidad absoluta, puesto que dichos valores "cualesquiera" tienen que cumplir ciertas condiciones; en este caso particular se tiene, por lo menos, la condición de que tales valores sean números complejos.

I.1 *Isodinamia:* Un objeto x es idéntico al objeto y cuando, y sólo cuando, todo lo que se atribuya a x, también se pueda atribuir a y, esto es, que:

$$(x \equiv y) \leftrightarrow (F(x) \equiv F(y)).$$

I.2 *Reflexividad:* Todo objeto es idéntico a sí mismo, o sea, que:

$$x \equiv x.$$

I.3 *Simetría:* Si un objeto x es idéntico a otro y, entonces este otro es idéntico al primero, es decir, que:

$$(x \equiv y) \rightarrow (y \equiv x).$$

I.4 *Transitividad por transferencia:* [20] Si un objeto x es idéntico a otro y, a la vez que este segundo objeto es idéntico a un tercero z, entonces el primer objeto es también idéntico al tercero, esto es, que:

$$((x \equiv y)\,(y \equiv z)) \rightarrow (x \equiv z).$$

I.5 *Transitividad por equiparación:* Si dos objetos, x e y, son respectivamente idénticos a un tercero z, entonces son idénticos entre sí, o sea, que:

$$((x \equiv z)\,(y \equiv z)) \rightarrow (x \equiv y).$$

Como se puede advertir, la identidad, en su más estrecho sentido, es aplicable exclusivamente en dos casos:

i) cuando el objeto es de tal manera singular que constituye el espécimen único de su clase; y,
ii) cuando existen varios especímenes de una clase, pero cada uno de ellos es indistinguible de los otros y, por ende, resulta imposible su identificación individual.

20 Aunque, inclusive en muchos tratados de matemáticas, se ha convertido en costumbre referirse a la transitividad a secas, es preciso distinguir rigurosamente entre la transitividad por transferencia, que podría expresarse así: "si una cosa es igual a otra y esta otra es igual a una tercera, entonces la primera y la tercera son iguales entre sí", y la transitividad por equiparación, formulada como *noción común* por Euclides: "cosas iguales a una y la misma son iguales entre sí". Como veremos más adelante, en casi todas las relaciones aquí tratadas se cumplen las dos transitividades, pero en cambio, en la relación de desigualdad solamente se cumple la transitividad por transferencia y no se cumple la transitividad por equiparación.

Un ejemplo del primer caso es el de:

$$x \equiv y,$$

porque: $x \equiv$ *Bertrand Russell*, a la vez que: $y \equiv$ *Bertrand Russell*. Y, del segundo caso, tenemos la siguiente ilustración:

$$x \equiv y,$$

porque: $x \equiv$ *electrón*, al mismo tiempo que: $y \equiv$ *electrón*; ya que, en el nivel actual del conocimiento científico, aun cuando la clase de los electrones está constituida por una infinidad de especímenes, resulta que todos ellos son completamente idénticos unos con otros, sin que se puedan discernir singularmente, porque carecen de rasgos distintivos o, al menos, los desconocemos hasta ahora.

Pasando a la relación de igualdad, tenemos que con ella se pierde la propiedad de la coincidencia, conservándose las otras cinco propiedades fundamentales de la identidad, las cuales se pueden expresar así:

II.1 *Isodinamia:* Un objeto x es igual al objeto y si, y sólo si, todo lo que atribuya a x también se pueda atribuir a y, y viceversa, o sea, que:

$$(x = y) \leftrightarrow (F(x) = F(y)).$$

II.2 *Reflexividad:* Todo objeto es igual a sí mismo, esto es:

$$x = x.$$

II.3 *Simetría:* Si un objeto es igual a otro, entonces este otro es igual al primero, es decir:

$$(x = y) \rightarrow (y = x).$$

II.4 *Transitividad por transferencia:* Si un objeto x es igual a otro y, a la vez que este segundo objeto es igual a un tercero z, entonces el primero y el tercero son iguales, o sea:

$$((x = y)\ (y = z)) \rightarrow (x = z).$$

II.5 *Transitividad por equiparación:* Si dos objetos, x e y, son respectivamente iguales a un tercero z, entonces son iguales entre sí, esto es:

$$((x = z)\ (y = z)) \rightarrow (x = y).$$

Tenemos, entonces, que la relación de igualdad se puede aplicar a objetos distintos, haciendo justamente abstracción de sus diferencias. Por ejemplo, dos figuras geométricas son iguales en tanto que hacemos abstracción de la diferencia entre sus posiciones espaciales. De la misma manera, dos conjuntos son iguales cuando constan de los mismos elementos, sólo que en especímenes diferentes. Por consiguiente, mientras que la identidad representa una coincidencia completa, la igualdad en cambio es solamente una coincidencia parcial entre las propiedades de los objetos. Y esa parcialidad permite, en efecto, que sea posible igualar alguna parte de un objeto con una parte de otro objeto; y, también, que podamos ejecutar ciertos cambios en objetos iguales, sin alterar su igualdad. De aquí podemos desprender una consecuencia dialéctica importante, como es la de que la desaparición de una de las propiedades que tiene la relación de identidad, al transformarla en relación de igualdad, implica el surgimiento de nuevas propiedades. Esta última característica es, por cierto, la que utilizamos para resolver una ecuación que, como ya lo hemos dicho, constituye una igualdad que solamente se cumple en condiciones determinadas.

De la relación de igualdad se desprenden por extensión la congruencia y la proporción, en las cuales se conservan las mismas propiedades fundamentales. Por consiguiente, vienen a ser relaciones equipolentes a la propia igualdad. Para la congruencia, dichas propiedades son:

III.1 *Isodinamia:* Una figura A es congruente a la figura B, si, y sólo si, todo lo que se atribuya a A también se pueda atribuir a B, y recíprocamente, o sea:

$$(A \cong B) \leftrightarrow (f(A) \cong f(B)).$$

III.2 *Reflexividad:* Toda figura es congruente con respecto a sí misma, esto es:

$$A \cong A.$$

III.3 *Simetría:* Si una figura A es congruente a otra B, entonces esta otra es congruente a la primera, es decir:

$$(A \cong B) \rightarrow (B \cong A).$$

III.4 *Transitividad por transferencia:* Si una figura A es congruente a otra B, a la vez que esta segunda es congruente a una tercera figura C, entonces la primera y la tercera figuras son congruentes, o sea:

$$((A \cong B)\,(B \cong C)) \rightarrow (A \cong C).$$

III.5 *Transitividad por equiparación:* Si dos figuras, A y B, son respectivamente congruentes a una tercera C, entonces son congruentes entre sí, esto es:

$$((A \cong C)\,(B \cong C)) \rightarrow (A \cong B).$$

Como es fácil advertir, la congruencia geométrica corresponde a la igualdad numérica. Dos figuras geométricas son congruentes cuando tienen la misma forma y sus dimensiones son las mismas. Por lo tanto, los elementos correspondientes u homólogos de dos figuras congruentes son iguales en longitud, superficie, volumen, abertura angular, etc., y, además de que ocupan la misma posición relativa unos respecto a los otros, también coinciden por su colocación en el mismo orden.

En cuanto a la proporción, sus propiedades fundamentales son también las mismas que tiene la relación de igualdad y se expresan de la manera siguiente:

IV.1 *Isodinamia:* Una razón $\frac{A}{B}$ es proporcional a la razón $\frac{C}{D}$ si, y únicamente si, para toda operación que se ejecute en $\frac{A}{B}$ exista otra operación correspondiente que se pueda ejecutar en $\frac{C}{D}$ conservando la misma proporción, y recíprocamente, o sea:

$$\left(\frac{A}{B} :: \frac{C}{D}\right) \leftrightarrow \left(\square \frac{A}{B} :: \triangle \frac{C}{D}\right).$$

IV.2 *Reflexividad:* Toda razón es proporcional a sí misma, esto es:

$$\frac{A}{B} :: \frac{A}{B}.$$

IV.3 *Simetría:* Si una razón $\frac{A}{B}$ es proporcional a otra $\frac{C}{D}$, entonces esta otra es proporcional a la primera, es decir:

$$\left(\frac{A}{B} :: \frac{C}{D}\right) \rightarrow \left(\frac{C}{D} :: \frac{A}{B}\right).$$

IV.4 *Transitividad por transferencia:* Si una razón $\frac{A}{B}$ es proporcional a otra $\frac{C}{D}$, a la vez que esta segunda razón es proporcional a una tercera $\frac{E}{F}$, entonces la primera y la tercera también son proporcionales,[21] o sea:

$$\left(\left(\frac{A}{B} :: \frac{C}{D}\right)\left(\frac{C}{D} :: \frac{E}{F}\right)\right) \rightarrow \left(\frac{A}{B} :: \frac{E}{F}\right).$$

IV.5 *Transitividad por equiparación:* Si dos razones $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ son respectivamente proporcionales a una tercera razón $\frac{E}{F}$, entonces son proporcionales entre sí, esto es:

$$\left(\left(\frac{A}{B} :: \frac{E}{F}\right)\left(\frac{C}{D} :: \frac{E}{F}\right)\right) \rightarrow \left(\frac{A}{B} :: \frac{C}{D}\right).$$

Como ya lo hemos dicho antes, los términos de una razón y, por ende, los elementos de una proporción, pueden ser cualesquiera magnitudes conmensurables o inconmensurables, con excepción del cero. También pueden ser magnitudes de otras muchas clases: algebraicas, geométricas, físicas, químicas, biológicas, económicas, etc. Muchas leyes físicas tienen su expresión matemática en una proporción, como sucede, por ejemplo, con la ley de la gravitación de Newton y su análoga, la ley de Coulomb sobre la atracción y la repulsión de las cargas eléctricas.

La semejanza entre las figuras geométricas es otra de las relaciones en que se ha desplegado la igualdad. Como es sabido, dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma, aunque no necesariamente las mismas dimensiones y, además, sus elementos homólogos están dispuestos siguiendo el mismo orden, se corresponden biunívocamente por su posición relativa y conservan la misma razón entre ellos. A su vez, la semejanza ha servido de base para construir la relación de equivalencia. Sus propiedades fundamentales son las de la igualdad, salvo que en la semejanza ya no se cumple la isodinamia. Tales propiedades las podemos expresar así:

V.2 *Reflexividad:* Toda figura geométrica es semejante a sí misma, o sea:

$$A \sim A.$$

[21] Euclides, *op. cit.,* libro V, teorema 11.

V.3 *Simetría:* Si una figura A es semejante a otra B, entonces esta otra también es semejante a la primera figura, esto es:

$$(A \sim B) \rightarrow (B \sim A).$$

V.4 *Transitividad por transferencia:* Si una figura A es semejante a otra B, a la vez que esta segunda figura es semejante a una tercera C, entonces la primera y la tercera figuras son también semejantes, es decir:

$$((A \sim C)\,(B \sim C)) \rightarrow (A \sim C).$$

V.5 *Transitividad por equiparación:* Si dos figuras A y B son respectivamente semejantes a una tercera C, entonces son semejantes entre sí, o sea:

$$((A \sim C)\,(B \sim C)) \rightarrow (A \sim B).$$

Otra cosa que podemos decir de la relación de semejanza geométrica es que, a partir de ella, se desarrolló la geometría homotésica, en la cual, a diferencia de lo que ocurre en la geometría métrica, dejan de ser invariantes ante las diversas transformaciones algunas magnitudes como las longitudes y, por consiguiente, las distancias, las áreas y los volúmenes.

Las propiedades fundamentales de la equivalencia son análogas a las de la semejanza geométrica y se formulan de la siguiente manera:

VI.2 *Reflexividad:* Cada objeto es equivalente a sí mismo, o sea, que cualquiera relación binaria se puede aplicar al mismo objeto:

$$x \leftrightarrow x,$$

o bien:

$$xRx.$$

VI.3 *Simetría:* Si un objeto x es equivalente a otro objeto y, entonces el segundo también es equivalente al primero, es decir, que cualquiera relación entre x e y es igualmente aplicable entre y y x:

$$(x \leftrightarrow y) \rightarrow (y \leftrightarrow x),$$

o bien:

$$xRy \rightarrow yRx.$$

VI.4 *Transitividad por transferencia:* Si el objeto x es equivalente al objeto y, a la vez que éste es equivalente a un tercer objeto z, entonces el primero es equivalente al tercero; o sea, dicho de otra manera, que una relación aplicable a x e y, lo mismo que a y y z, también es aplicable a x y z:

$$((x \leftrightarrow y)\ (y \leftrightarrow z)) \rightarrow (x \leftrightarrow z),$$

o bien:

$$((xRy)\ (yRz)) \rightarrow (xRz).$$

VI.5 *Transitividad por equiparación:* Si el objeto x y el objeto y son respectivamente equivalentes a otro objeto z, entonces son equivalentes entre sí; esto es, que cuando una relación es aplicable a x y z, lo mismo que a y y z, también es aplicable a x e y:

$$((x \leftrightarrow z)\ (y \leftrightarrow z)) \rightarrow (x \leftrightarrow y),$$

o bien:

$$((xRz)\ (yRz)) \rightarrow (xRy).$$

De acuerdo con lo anterior, se pueden formular algunas de las aplicaciones específicas de la equivalencia, como son las siguientes:

Una relación es de equivalencia si, y sólo si, es reflexiva, simétrica y transitiva, tanto por transferencia como por equiparación.

Dos conjuntos son equivalentes cuando, y solamente cuando, los elementos de uno y otro están en correspondencia biunívoca.

Los dos miembros de una ecuación algebraica conservan su equivalencia cuando, y sólo cuando, de manera simultánea a ambos miembros se les suman cantidades iguales, se les restan cantidades iguales, se les multiplica por el mismo factor, se les divide entre el mismo divisor, se les eleva a la misma potencia o se les extrae la misma raíz.[22]

Dos fracciones son equivalentes si dan el mismo resultado al ser reducidas a un denominador común.

Dos fórmulas del cálculo proposicional, o del cálculo de predicados, son equivalentes entre sí cuando, y sólo cuando, son simultáneamente verdaderas o simultáneamente falsas.

Dos problemas son equivalentes siempre que la solución de uno de ellos implique la solución del otro, y viceversa.

Por su parte, la implicación es una relación en la cual únicamente se cumplen la reflexividad y la transitividad por transferencia, desapareciendo

[22] Es la expresión completa de la ley de monotonía de las operaciones algebraicas.

en cambio la simetría y la transitividad por equiparación. De esa manera, sus dos propiedades fundamentales son:

VII.2 *Reflexividad:* Todo objeto es implicado por sí mismo:

$$x \rightarrow x.$$

VII.4 *Transitividad por transferencia:* Si el objeto x implica al objeto y, a la vez que éste implica a otro objeto z, entonces el primero implica también al tercero:

$$((x \rightarrow y)\ (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \rightarrow z).$$

Por otra parte, la desigualdad es una relación en la cual se pierde la reflexividad, además de la simetría y la transitividad por equiparación, manteniéndose únicamente la transitividad por transferencia. Así, esa única propiedad de la desigualdad se expresa de este modo:

VIII.4 *Transitividad por transferencia:* Si el objeto x es mayor (o menor) que el objeto y, al mismo tiempo que éste es mayor (o menor) que otro objeto z, entonces el primer objeto es mayor (o menor) que el tercero:

$$((x > y)\ (y > z)) \rightarrow (x > z),$$

o bien:

$$((x < y)\ (y < z)) \rightarrow (x < z).$$

Ahora bien, en lo que respecta a las proporciones, de la igualdad entre sus razones se pasó primero a la equivalencia de relaciones entre elementos correspondientes y, luego, a la correspondencia equipolente entre elementos igualmente vinculados por alguna correspondencia, que es lo que constituye la analogía. En este segundo paso, la analogía recuperó, por decirlo así, la propiedad de la isodinamia que, como hemos visto, desaparece al pasar de la igualdad a la equivalencia.

Dicho de otra manera, la analogía es la correspondencia de funciones diferentes entre los elementos correspondientes de dos conjuntos también diferentes. Tenemos así dos relaciones que son inseparables, pero que podemos distinguir claramente: la correspondencia entre los elementos y la correspondencia entre las funciones. La correspondencia entre los elementos de ambos conjuntos puede ser biunívoca, unívoca, multívoca o analógica. Por su parte, la correspondencia equipolente entre las funciones de los elementos de los conjuntos solamente puede ser biunívoca. Por lo tanto, existen cuatro combinaciones posibles de esas correspondencias, que son las siguientes: *a)* la equipolencia de funciones entre elementos biunívocos; *b)* la equipolencia de funciones entre elementos unívocos; *c)* la equipolencia de funciones entre elementos multívocos; y, *d)* la equipolencia de funciones entre elementos análogos. Podemos precisar los cuatro tipos de analogías resultantes, determinando sus condiciones de la siguiente manera:

> DEFINICIÓN X: Cuando existe una correspondencia biunívoca entre los elementos del conjunto S y los elementos del conjunto T, a la vez que se mantiene una correspondencia también biunívoca entre las funciones de S y las de T, entonces se tiene un *isomorfismo.*
>
> DEFINICIÓN XI: Cuando existe una correspondencia unívoca entre los elementos del conjunto S con respecto al conjunto T, o viceversa, al mismo tiempo que se tiene una correspondencia biunívoca entre las funciones del conjunto S y las funciones del conjunto T, entonces se tiene un *homomorfismo.*
>
> DEFINICIÓN XII: Cuando existe una correspondencia multívoca entre los elementos del conjunto S y los elementos del conjunto T, a la vez que se tiene una correspondencia biunívoca entre las funciones de S y las funciones de T, entonces existe entre ellos un *isologismo.*
>
> DEFINICIÓN XIII: Cuando existe una correspondencia analógica entre los elementos del conjunto S y los elementos del conjunto T, a la vez que se tiene una correspondencia biunívoca entre las funciones del conjunto S y las funciones del conjunto T, se tiene un *analogismo.*

Como se puede advertir, en los cuatro tipos de analogía se mantiene la equipolencia de funciones entre los elementos de los dos conjuntos. En cambio, la equivalencia de las estructuras que existe en el isomorfismo, se va atenuando gradualmente en el homomorfismo y en el isologismo, hasta llegar a ser la correspondencia analógica propiamente dicha entre sus respectivas estructuras, que caracteriza al analogismo. En lo que sigue nos ocuparemos exclusivamente del analogismo. Como es bien sabido, el isomorfismo y el homomorfismo ya han sido desarrollados ampliamente en la teoría de los conjuntos. En cuanto al isologismo, esperamos tratarlo posteriormente en otro artículo.

El analogismo se puede expresar en una forma análoga a la proporción, tal como la introdujo Aristóteles: [23]

$$\frac{pulmones}{aire} \approxeq \frac{branquias}{agua}.$$

En el caso particular de que los términos de un analogismo sean magnitudes cuantificadas, entonces su expresión adopta enteramente la forma de una proporción. Así sucede, por ejemplo, en el caso de un sistema mecánico cuyo funcionamiento sea análogo al funcionamiento de un circuito eléctrico. Su-

[23] Aristóteles, *De anima,* libro III.

pongamos que el comportamiento dinámico del primer sistema está expresado por la ecuación siguiente:

$$F = M \frac{dV}{dt} + fV + \frac{1}{S} \int V \, dt.$$

En donde: $F =$ fuerza, $M =$ masa, $t =$ tiempo, $V =$ velocidad, $f =$ coeficiente de fricción, $S =$ coeficiente de flexión. En tanto que el comportamiento del circuito eléctrico se encuentra expresado por la ecuación:

$$i = C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{R} v + \frac{1}{L} \int v \, dt.$$

En donde: $i =$ corriente eléctrica, $v =$ tensión, $C =$ capacidad, $\frac{1}{R} =$ conductancia, $L =$ inductancia. Entonces, la analogía existente se expresa por medio de la siguiente proporción múltiple:

$$\frac{i}{F} = \frac{C}{M} = \frac{v}{V} = \frac{1}{fR} = \frac{S}{L}.$$

Formularemos ahora las cinco propiedades fundamentales del analogismo, las cuales corresponden a las establecidas para la proporción y son las siguientes:

IX.1 *Isodinamia:* Un conjunto S es análogo a otro conjunto T cuando, y sólo cuando, los elementos $a, b, c, \ldots$ del conjunto S son análogos a los elementos $p, q, r, \ldots$ del conjunto T, a la vez que, para toda función $F(a, b, c, \ldots)$ atribuible a S, existe otra función análoga correspondiente $F(p, q, r, \ldots)$ atribuible a T, y recíprocamente, o sea:

$$(S \approxeq T) \leftrightarrow ((a, b, c, \ldots) \approxeq (p, q, r, \ldots)),$$

a la vez que:

$$(S \approxeq T) \leftrightarrow ((F(a, b, c, \ldots) \approxeq (F(p, q, r, \ldots)).$$

IX.2 *Reflexividad:* Todo conjunto es análogo con respecto a sí mismo, esto es:

$$S \approxeq S,$$

a la vez que:

$$\frac{a}{b} \approxeq \frac{a}{b}.$$

IX.3 *Simetría:* Si un conjunto S es análogo a otro conjunto T, entonces el segundo es también análogo al primero, es decir:

$$(S \approxeq T) \rightarrow (T \approxeq S),$$

al mismo tiempo que:

$$\left(\frac{a}{b} \approxeq \frac{p}{q}\right) \rightarrow \left(\frac{p}{q} \approxeq \frac{a}{b}\right).$$

IX.4 *Transitividad por transferencia:* Si un conjunto S es análogo a otro conjunto T, a la vez que este segundo conjunto es análogo a un tercero U, entonces el primer conjunto y el tercero también son análogos, o sea:

$$((S \approxeq T)\,(T \approxeq U)) \rightarrow (S \approxeq U),$$

a la vez que:

$$\left(\left(\frac{a}{b} \approxeq \frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q} \approxeq \frac{x}{y}\right)\right) \rightarrow \left(\frac{a}{b} \approxeq \frac{x}{y}\right)$$

IX.5 *Transitividad por equiparación:* Si dos conjuntos, S y T, son respectivamente análogos a un tercer conjunto U, entonces son análogos entre sí, esto es:

$$((S \approxeq U)\,(T \approxeq U)) \rightarrow (S \approxeq T),$$

al mismo tiempo que:

$$\left(\left(\frac{a}{b} \approxeq \frac{x}{y}\right)\left(\frac{p}{q} \approxeq \frac{x}{y}\right)\right) \rightarrow \left(\frac{a}{b} \approxeq \frac{p}{q}\right)$$

De las propiedades IX.2 y IX.3 se desprende la posibilidad de interpolar y de extrapolar en un conjunto, con tal que sean conocidos algunos de sus elementos, como es el caso de la inmensa mayoría de los dominios investigados por la ciencia. En efecto, con base en IX.3, tenemos que cualquiera parte de un conjunto es análoga a las otras partes del mismo conjunto y, entonces, aplicando IX.2 podemos inferir, partiendo de las funciones ya determinadas en la parte conocida, que a la parte desconocida le corresponden esas mismas funciones. Es decir, que si conocemos algunos valores de las variables de una función, entonces, podemos emplear la misma función para calcular cualesquiera otros valores de las variables, ya sea que se encuentren comprendidos dentro de los límites experimentados, lo que es una interpolación, o fuera de dichos límites, lo cual es una extrapolación.

La propiedad IX.4 constituye el fundamento de la teoría de los modelos. Como se sabe, los modelos que se utilizan en la investigación científica son representaciones análogas al sistema original que se está estudiando. Por lo tanto, el funcionamiento del modelo tiene que ser equivalente al funcionamiento del original; mientras que los elementos del modelo pueden ser completamente diferentes a los del original y, de hecho, lo son así en muchísimos casos. Además, como la relación de analogía es simétrica, resulta que el mismo sistema original es, a su vez, un modelo del sistema utilizado como modelo. En muchas ocasiones, se pueden emplear simultáneamente dos o más modelos de un mismo sistema original y, entonces, cuando el investigador encuentra difícil seguir avanzando con uno de los modelos, al llegar a una determinada parte de su investigación, muchas veces puede resultar menos difícil proseguir su trabajo con otro modelo. Más todavía, llega a darse el caso de que, para avanzar en el conocimiento de un sistema se utilice primero como modelo otro sistema mejor conocido; pero, luego, puede resultar que el conocimiento del primer sistema adelante tanto que, a partir de determinado punto, sea susceptible de servir como modelo para desarrollar el conocimiento del segundo sistema. Así sucedió, por ejemplo, con el estudio de los sistemas electrodinámicos, para lo cual se utilizaron como modelos a los sistemas hidrodinámicos, aunque más tarde se procedió a la inversa, estudiándose entonces los sistemas hidrodinámicos usando como modelos a los sistemas electrodinámicos, que ahora son mejor conocidos que aquellos.

Las propiedades IX.5 y IX.6 permiten extender la analogía de un sistema a otros, de una manera ilimitada. Como el analogismo es una propiedad conservativa, entonces el descubrimiento de que un cierto sistema *S* es análogo a un sistema *T*, del cual ya se sabe que es análogo a otro sistema *U*, lleva a concluir que ese sistema *S* también es análogo al sistema *U*. Igualmente, el descubrimiento de que un sistema *S* es análogo al sistema *U*, cuando ya se sabe que otro sistema *T* es también análogo a *U*, conduce a la conclusión de que *S* es análogo a *T*. De esa manera, la relación de analogía permite establecer una verdadera celosía de sistemas análogos, semejante a la celosía de un cristal y que, como esta última, es susceptible de extenderse infinitamente en todos sentidos. En esas condiciones tenemos que, entre los sistemas analogados, cada uno de ellos resulta ser modelo de todos y cada uno de los otros sistemas, inclusive de sí mismo.

El analogismo tiene, además de las propiedades antes dichas, otras que vamos a formular a continuación, las cuales han sido establecidas en correspondencia con las propiedades de la proporción:

IX.6 *Conmutación:*[24] Si se intercambian los elementos medios de un analogismo, se obtiene otro analogismo entre dos analogías diferentes, que se llama analogismo conmutado:

$$\left(\frac{a}{b} \approx \frac{p}{q}\right) \rightarrow \left(\frac{a}{p} \approx \frac{b}{q}\right).$$

IX.7 *Inversión:*[25] Si se invierten las analogías de un analogismo, resulta otro analogismo entre dos analogías diferentes, que se llama analogismo invertido:

$$\left(\frac{a}{b} \approx \frac{p}{q}\right) \rightarrow \left(\frac{q}{p} \approx \frac{b}{a}\right).$$

IX.8 *Alternación:* Si se intercambian los elementos extremos de un analogismo, se obtiene otro analogismo entre dos analogías diferentes, al que se le denomina analogismo alternado:

$$\left(\frac{a}{b} \approx \frac{p}{q}\right) \rightarrow \left(\frac{q}{b} \approx \frac{p}{a}\right).$$

IX.9 *Idempotencia:* Si se intercambian, se invierten o se alteran los elementos de un analogismo, o bien, se ejecutan sucesivamente dos o más de esas operaciones, de tal manera que finalmente se vuelva al analogismo original, se habrá ejecutado una operación de idempotencia y el analogismo se denomina analogismo idempotente:

$$\left(\frac{a}{b} \approx \frac{p}{q}\right) \rightarrow \left(\frac{a}{b} \approx \frac{p}{q}\right).$$

IX.10 *Conmutación de un analogismo conmutado:* Si se intercambian los elementos medios de un analogismo conmutado, se vuelve al ana-

[24] Corresponde a una propiedad de la proporción; véase Euclides, *op. cit.,* libro V, definición 12.

[25] Véase su análoga para la proporción, Euclides, libro V, definición 13.

logismo original, o sea, que se ejecuta una operación de idempotencia:

$$\left(\frac{a}{p} \approx \frac{b}{q}\right) \rightarrow \left(\frac{a}{b} \approx \frac{p}{q}\right).$$

IX.11 *Conmutación de un analogismo invertido*: Si se intercambian los elementos medios de un analogismo invertido, resulta el analogismo alternado:

$$\left(\frac{q}{p} \approx \frac{b}{a}\right) \rightarrow \left(\frac{q}{b} \approx \frac{p}{a}\right).$$

IX.12 *Conmutación de un analogismo alternado*: Si se intercambian los elementos medios de un analogismo alternado, resulta el analogismo invertido:

$$\left(\frac{q}{b} \approx \frac{p}{a}\right) \rightarrow \left(\frac{q}{p} \approx \frac{b}{a}\right).$$

IX.13 *Inversión de un analogismo conmutado*: Si se invierten las analogías de un analogismo conmutado, resulta el analogismo alternado:

$$\left(\frac{a}{p} \approx \frac{b}{q}\right) \rightarrow \left(\frac{q}{b} \approx \frac{p}{a}\right).$$

IX.14 *Inversión de un analogismo invertido*: Si se invierten las analogías de un analogismo invertido, se vuelve al analogismo original, esto es, se ejecuta una operación de idempotencia:

$$\left(\frac{q}{p} \approx \frac{b}{a}\right) \rightarrow \left(\frac{a}{b} \approx \frac{p}{q}\right).$$

IX.15 *Inversión de un analogismo alternado*: Si se invierten las analogías de un analogismo alternado, resulta el analogismo conmutado:

$$\left(\frac{q}{b} \approx \frac{p}{a}\right) \rightarrow \left(\frac{a}{p} \approx \frac{b}{q}\right).$$

IX.16 *Alternación de un analogismo conmutado*: Si se intercambian los elementos extremos de un analogismo conmutado, resulta el analogismo invertido:

$$\left(\frac{a}{p} \approx \frac{b}{q}\right) \rightarrow \left(\frac{q}{p} \approx \frac{b}{a}\right).$$

IX.17 *Alternación de un analogismo invertido:* Si se intercambian los elementos extremos de un analogismo invertido, resulta el analogismo conmutado:

$$\left(\frac{q}{p}\approx\frac{b}{a}\right)\rightarrow\left(\frac{a}{p}\approx\frac{b}{q}\right).$$

IX.18 *Alternación de un analogismo alternado:* Si se intercambian los elementos extremos de un analogismo alternado, se vuelve al analogismo original, es decir, se ejecuta la operación de idempotencia:

$$\left(\frac{q}{b}\approx\frac{p}{a}\right)\rightarrow\left)\frac{a}{b}\approx\frac{p}{q}\right).$$

IX.19 *Las operaciones de idempotencia, conmutación, inversión y alternación forman un grupo abeliano:* Si simbolizamos la operación de idempotencia por I, la de conmutación por M, la de inversión por R y la de alternación por E, entonces, de acuerdo con los resultados de las operaciones IX.6 a IX.18, podemos formar la siguiente tabla:

	I	M	R	E
I	I	M	R	E
M	M	I	E	R
R	R	E	I	M
E	E	R	M	I

En efecto, es fácil advertir así que para las susodichas operaciones se cumplen la cerradura, la asociatividad, la identidad, la inversión y la conmutación, las cuales son justamente las condiciones necesarias y suficientes para que tengamos formado un grupo abeliano.

IX.20 *Composición del consecuente:* [26] En un analogismo, si a cada antecedente se le suma su respectivo consecuente, se obtiene otro analogismo entre dos analogías diferentes:

$$\left(\frac{a}{b}\approx\frac{c}{d}\right)\rightarrow\left(\frac{a+b}{b}\approx\frac{c+d}{d}\right).$$

[26] Su análoga respectiva es la definición 14, libro V de Euclides.

IX.21 *Separación del consecuente:* [27] En un analogismo, si a cada antecedente se le sustrae su respectivo consecuente, se obtiene otro analogismo entre dos analogías diferentes:

$$\left(\frac{a}{b} \approxeq \frac{c}{d}\right) \rightarrow \left(\frac{a-b}{b} \approxeq \frac{c-d}{d}\right).$$

IX.22 *Composición del antecedente:* En un analogismo, si a cada consecuente se le suma su respectivo antecedente, se obtiene otro analogismo entre dos analogías diferentes:

$$\left(\frac{a}{b} \approxeq \frac{c}{d}\right) \rightarrow \left(\frac{a}{b+a} \approxeq \frac{c}{d+c}\right).$$

IX.23 *Separación del antecedente:* [28] En un analogismo, si a cada consecuente se le sustrae su respectivo antecedente, se obtiene otro analogismo entre dos analogías diferentes:

$$\left(\frac{a}{b} \approxeq \frac{c}{d}\right) \rightarrow \left(\frac{a}{b-a} \approxeq \frac{c}{d-c}\right).$$

IX.24 *Composición de antecedentes y de consecuentes:* En un analogismo, si se suman los antecedentes para formar otro antecedente, a la vez que se suman los consecuentes para formar otro consecuente, entonces la nueva analogía así compuesta conserva el mismo analogismo original:

$$\left(\frac{a}{b} \approxeq \frac{c}{d}\right) \rightarrow \left(\frac{a+c}{b+d} \approxeq \frac{a}{b}\right).$$

IX.25 *Separación de antecedentes y de consecuentes:* [29] En un analogismo, si se restan los antecedentes para formar otro antecedente, a la vez que se restan los consecuentes para formar otro consecuente, entonces la nueva analogía así integrada conserva el analogismo original:

$$\left(\frac{a}{b} \approxeq \frac{c}{d}\right) \rightarrow \left(\frac{a-c}{b-d} \approxeq \frac{a}{b}\right).$$

[27] La definición 15 del libro V de Euclides es su análoga para la proporción.

[28] Su correspondiente análoga para la proporción es la definición 16, libro V de Euclides.

[29] Su análogo correspondiente para la proporción es el teorema 19, libro V de Euclides.

IX.26 *Composición y separación de antecedentes y de consecuentes:* En un analogismo, si se componen los antecedentes y los consecuentes, a la vez que se separan unos y otros, entonces las dos nuevas analogías así formadas están en el mismo analogismo original:

$$\left(\frac{a}{b} \approx \frac{c}{d}\right) \rightarrow \left(\frac{a+c}{b+d} \approx \frac{a-c}{b-d} \approx \frac{a}{b}\right).$$

IX.27 *Multiplicación de antecedentes y de consecuentes:* [30] En un analogismo, si se multiplican los antecedentes por un mismo factor y los consecuentes por otro factor común, se obtiene otro analogismo entre dos analogías diferentes:

$$\left(\frac{a}{b} \approx \frac{c}{d}\right) \rightarrow \left(\frac{ma}{nb} \approx \frac{mc}{nd}\right).$$

IX.28 *Multiplicación de analogías:* [31] En un analogismo, si se multiplican las dos analogías por un mismo factor, se conserva el analogismo original:

$$\left(\frac{a}{b} \approx \frac{c}{d}\right) \rightarrow \left(\frac{ma}{mb} \approx \frac{mc}{md} \approx \frac{a}{b}\right).$$

IX.29 *Otra multiplicación de analogías:* En un analogismo, si cada analogía se multiplica por un factor diferente, entonces el analogismo no se altera:

$$\left(\frac{a}{b} \approx \frac{c}{d}\right) \rightarrow \left(\frac{ma}{mb} \approx \frac{nc}{nd} \approx \frac{a}{b}\right).$$

IX.30 *Composición de antecedentes y de consecuentes en un analogismo múltiple:* [32] En un analogismo múltiple, si se suman los antecedentes para formar un nuevo antecedente, a la vez que se suman los consecuentes para formar un nuevo consecuente, entonces la nueva analogía así formada se mantiene en el mismo analogismo original:

$$\left(\frac{a}{b} \approx \frac{c}{d} \approx \frac{e}{f} \approx \cdots \approx \frac{m}{n}\right) \rightarrow \left(\frac{a+c+e+\ldots+m}{b+d+f+\ldots+n} \approx \frac{a}{b}\right).$$

[30] El teorema 4 del libro V de Euclides es su respectivo análogo.
[31] *Tiene como análogo el teorema 15 del libro V de Euclides.*
[32] Su análogo para la proporción es el teorema 12 del libro V de Euclides.

IX.31 *Separación de antecedentes y de consecuentes en un analogismo múltiple:* En un analogismo múltiple, si se restan los antecedentes para formar un nuevo antecedente, al mismo tiempo que se restan los consecuentes para formar un nuevo consecuente, entonces la nueva analogía así formada conserva el analogismo original:

$$\left(\frac{a}{b} \approx \frac{c}{d} \approx \frac{e}{f} \approx \cdots \approx \frac{m}{n}\right) \rightarrow \left(\frac{a-c-e-\ldots-m}{b-d-f-\ldots-n} \approx \frac{a}{b}\right).$$

IX.32 *Multiplicación de analogismos con antecedentes comunes:* Cuando dos analogismos tienen en común los antecedentes, entonces su multiplicación inversa, analogía a analogía, produce como resultado la formación de las dos analogías de un nuevo analogismo:

$$\left(\left(\frac{a}{b} \approx \frac{p}{q}\right)\left(\frac{a}{c} \approx \frac{p}{r}\right)\right) \rightarrow \left(\frac{c}{b} \approx \frac{r}{q}\right).$$

IX.33 *Multiplicación de analogismos con consecuentes comunes:* Cuando dos analogismos tienen en común los consecuentes, entonces su multiplicación inversa, analogía a analogía, tiene como resultado la formación de las dos analogías de un nuevo analogismo:

$$\left(\left(\frac{a}{b} \approx \frac{p}{q}\right)\left(\frac{c}{b} \approx \frac{r}{q}\right)\right) \rightarrow \left(\frac{a}{c} \approx \frac{p}{r}\right).$$

IX.34 *Multiplicación de analogismos con términos extremos comunes:* Cuando dos analogismos tienen en común los términos extremos, entonces su multiplicación inversa, analogía a analogía, tiene como resultado la formación de las dos analogías de un nuevo analogismo:

$$\left(\left(\frac{a}{b} \approx \frac{p}{q}\right)\left(\frac{a}{c} \approx \frac{r}{q}\right)\right) \rightarrow \left(\frac{c}{b} \approx \frac{p}{r}\right).$$

IX.35 *Multiplicación de analogismos con términos medios comunes:* Cuando dos analogismos tienen en común los términos medios, entonces su multiplicación inversa, analogía a analogía, produce como resultado la formación de las dos analogías de un nuevo analogismo:

$$\left(\left(\frac{a}{b} \approx \frac{p}{q}\right)\left(\frac{c}{b} \approx \frac{p}{r}\right)\right) \rightarrow \left(\frac{a}{c} \approx \frac{r}{q}\right).$$

IX.36 *Mutliplicación de analogismos con trasposición de antecedentes y* *consecuentes*: Cuando los antecedentes de un analogismo son los consecuentes de otro, entonces su multiplicación, analogía a analogía, produce como resultado un nuevo analogismo:

$$\left(\left(\frac{a}{b} \approxeq \frac{p}{q}\right)\left(\frac{c}{a} \approxeq \frac{r}{p}\right)\right) \rightarrow \left(\frac{c}{b} \approxeq \frac{r}{q}\right)$$

IX.37 *Multiplicación de analogismos con trasposición de consecuentes y antecedentes:*[33] Cuando los consecuentes de un analogismo son los antecedentes de otro, entonces su multiplicación, analogía a analogía, produce como resultado un nuevo analogismo:

$$\left(\left(\frac{a}{b} \approxeq \frac{p}{q}\right)\left(\frac{b}{c} \approxeq \frac{q}{r}\right)\right) \rightarrow \left(\frac{a}{c} \approxeq \frac{p}{r}\right)$$

IX.38 *Multiplicación de analogismos con trasposición de términos extremos y medios*: Cuando los términos extremos de un analogismo son los términos medios de otro, entonces su multiplicación, analogía a analogía, tiene como resultado un nuevo analogismo:

$$\left(\left(\frac{a}{b} \approxeq \frac{p}{q}\right)\left(\frac{c}{a} \approxeq \frac{q}{r}\right)\right) \rightarrow \left(\frac{c}{b} \approxeq \frac{p}{r}\right)$$

IX.39 *Multiplicación de analogismos con trasposición de términos medios y extremos:* Cuando los términos medios de un analogismo son los términos extremos de otro, entonces su multiplicación, analogía a analogía, tiene como resultado un nuevo analogismo:

$$\left(\left(\frac{a}{b} \approxeq \frac{p}{q}\right)\left(\frac{b}{c} \approxeq \frac{r}{p}\right)\right) \rightarrow \left(\frac{a}{c} \approxeq \frac{r}{q}\right)$$

ELI DE GORTARI

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

[33] Tiene como análogo para la proporción el teorema 22 del libro V de Euclides.