Diánoia, vol. 26, no. 26, 1980

ALGUNAS OBSERVACIONES SOBRE EL DEBILITAMIENTO DE LA GEOMETRÍA FÍSICA

1. Los *Elementos* euclídeos son un modelo, a la vez, de *geometría* y de *sistema* deductivo. Más aún, en el curso de la historia los sistemas deductivos han sido presentados, o buscados, *en relación con aquel arquetipo*. La construcción *more geometrico*, o su intento, se dio, con mayor o menor éxito, en muy variadas disciplinas, científicas o no —baste recordar la *Ética* de Spinoza o los *Principles of Psychology* de Hull. *Por otra parte, la enseñanza de la geo*metría elemental se ha seguido dando a través de obras que parafrasean los *Elementos* y tanto el conocimiento concreto como la forma deductiva que aportan se consideran altamente formativos en la enseñanza inicial. Si lo son, aun en versiones deformadas, es por la genialidad de los propios *Elementos, obra paradigmática en el desarrollo del conocimiento científico.*

Ambos hechos —modelo de ciencias y de cientificidad, y persistente obra de enseñanza básica— no son gratuitos, pese a las transformaciones que la matemática ha experimentado en el curso de su historia, sobre todo reciente. Pero, además, si decimos que esa obra constituye un modelo de geometría y de sistema deductivo es porque deben distinguirse ambos aspectos. Los *Elementos* nos dan una *geometría física* construída en forma deductiva. Sea que adoptemos, o no, la definición de ésta debida a Wilder,[1] el carácter "físico" de la geometría de Euclides es notorio si la contraponemos, por ejemplo, a la geometría (también *euclídea*) de Hilbert. Las presentaciones de la "misma" geometría, en uno y en otro caso, contienen de algún modo los extremos de un proceso de profunda transformación de las ciencias deductivas, mismo que podría, con pocas dudas, llamarse revolucionario.

2. El tema de las revoluciones científicas, tan trabajado hoy por hoy, se refiere casi siempre a las ciencias de "hechos", pero nada obsta que pueda fundadamente estudiarse en forma más amplia. Antes de siquiera plantearse si el modelo kuhniano, tal cual o modificado convenientemente, se aplica a un caso como el presente, es necesario enfocar algunos momentos, a nuestro modo de ver también revolucionarios, que marcan hitos en el proceso de transformación de la geometría. Los momentos que vamos a considerar son sólo *algunos* de los significativos, pero pueden servir de adecuado punto de

[1] R. Wilder, "El método axiomático", en J. R. Newman, *Matemáticas, verdad y realidad*, Barcelona, Grijalbo, 1969.

partida para estimar el carácter del paso de una geometría física arquetípica a una geometría euclídea *distinta* —la cual contiene, como bien se sabe, muchos de los caracteres de la matemática de nuestros días—, sin prejuzgar si el aporte hilbertiano en sí debe denominarse "revolucionario" y, por tanto, sin fechar por ahora el momento exacto de una transformación como la indicada.

3. Ya en la geometría analítica cartesiana se da un cambio en cuanto a los "objetos" del discurso geométrico. En particular, en el caso de la geometría plana, la correspondencia entre pares de números —coordenadas— y puntos, y entre ecuaciones y rectas, con un significado geométrico preciso de los parámetros, introduce un nuevo lenguaje acerca de las relaciones entre puntos y rectas en las que ellos no aparecen para nada como tales. Un "punto" $P(a, b)$ pertenecerá a una "recta" $y = mx + n$ si y sólo si $b = ma + n$. En ese caso, los puntos y rectas no poseen las propiedades asumidas desde siempre —en rigor, al llamarlos así se estarían usando nombres arbitrarios— sino otras propiedades *nuevas* (en el ejemplo referido, las coordenadas satisfacen la ecuación), si bien correspondientes a las primeras. Así, el discurso de la geometría analítica con respecto al plano adquiere una nueva forma, y los "objetos" son *otra cosa que puntos y rectas sensu stricto.*

Sin embargo, la producción de esta nueva geometría se efectúa de tal modo que la nueva versión reproduce en un lenguaje "isomorfo" las propiedades ya conocidas. La geometría analítica aparece como una construcción adaptada especialmente para el cálculo de posiciones y de trayectorias —*elementos físicos—: nuevamente, pues, como geometría física, y en este sentido* no constituye una innovación radical. Lo que interesa a Descartes es algo más que la trayectoria de una mosca en el invierno holandés; no obstante, en el nuevo cálculo se *reproducen* las estructuras que interesan para el control de acontecimientos físicos como ese zumbador vuelo. La naturaleza y el alcance de las aplicaciones son esclarecedores al respecto. Por un lado, la geometría euclídea cartesiana *reproduce,* con objetos aparentes distintos, relaciones bien estudiadas; sólo que lo hace con un nuevo rendimiento teórico. Ya en este caso se presenta, en tenue esbozo —y con una ambigüedad que veremos persistir—, el proceso de transformación de la geometría euclídea. Ya aquí se produce más de lo reproducido; por ejemplo, las soluciones de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas correspondientes a los puntos de intersección de rectas en el plano (1) admiten otras interpretaciones (paralelismo o superposición) distintas a la propuesta y, aun en ella, (2) el estudio de los parámetros aporta una generalidad insólita. De ahí el interés de este "primer" tímido paso en la larga marcha hacia la geometría abstracta.

4. El estudio de las cónicas tiene una historia de veintitrés siglos. Sin em-

bargo, durante doce de ellos, desde Papus hasta el comienzo del dieciséis, no experimentó progresos. Coolidge [2] nos dice que, si excluyéramos a Papus, serían diecisiete siglos de quietud. De golpe, el interés por el tema se renovó y desembocó en lo que hoy conocemos como geometría proyectiva. Desargues, Pascal y, particularmente, Poncelet se destacan entre los nombres de quienes cumplieron este proceso. Vamos a aludir a un momento en esa desigual historia. Más allá de la consideración de elementos en el infinito —puntos y rectas impropios—, más allá de las especiales propiedades del hexágono de Pascal o de teoremas significativos en ese desarrollo, vamos a considerar sólo la presentación dual de la geometría proyectiva debida fundamentalmente a Gergonne.

Tomando, por su relativa simplicidad, la geometría proyectiva plana, su presentación dual, que se hace viable por la introducción de elementos en el infinito —en particular, de puntos impropios—, se desarrolla del modo siguiente. Los sistemas geométricos presentan un "paralelismo" —en esta geometría que trata las paralelas de modo tan singular, *cortándolas* justamente en un punto impropio— entre dos presentaciones optativas, duales; dos columnas, una de las cuales incluye puntos y rectas en los lugares donde en la otra aparecen, respectivamente, rectas y puntos.[3]

Esta forma dual de presentar las propiedades de objetos geométricos supone un principio de dualidad cuya significación nos interesa, mismo que llega hasta nuestros días en las formas usuales de presentar la geometría proyectiva en las construcciones axiomáticas correspondientes al estado actual de nuestras concepciones deductivas.

Sin necesidad de explicar en nueva forma tal principio, la presentación dual misma introduce una nueva manera de entender la geometría. Dada la referida forma de presentación, la geometría puede concebirse construída por una columna A —o por otra B—, o bien (más razonablemente), por la presentación completa que comprende las dos columnas a la vez. Se trata, como dijimos, de dos sistemas deductivos "paralelos" en los que "puntos" y "rectas" aparecen determinados del modo indicado. Ahora bien, podemos preguntarnos de inmediato cuáles son los objetos de esta geometría y de qué modo son susceptibles de una interpretación física. Aunque la idea de magnitud —longitud de un segmento, por ejemplo— haya sido eliminada, interesando sólo las propiedades justamente proyectivas, podemos preguntarnos si esta geometría podría interpretarse de manera que el dominio estuviese

[2] J. L. Coolidge, *A Histqry of Conic Sections and Quadric Surfaces,* Dover, New York, 1968.

[3] En "Note sur le principe de dualité", J. D. Gergonne nos dice: "En geometría plana, cuando un teorema independiente de relaciones métricas de ángulos y longitudes está demostrado, se puede concluir inmediatamente, y sin que haya necesidad de demostración, otro teorema, en el cual los puntos del primero estarán reemplazados por rectas y las rectas por puntos" (p. 61).

formado por elementos físicos —posiciones o trayectorias—, tal como podían interpretarse la euclídea y la analítica. Y, más aún, podemos preguntarnos qué cosas designan las expresiones "punto" y "recta" en este uso tan peculiar. Es esto precisamente lo que aparece como una novedad significativa.

Ambas columnas, leídas alternadamente, constituyen la geometría proyectiva. Se trata de dos sistemas deductivos isomorfos, de igual estructura, cuyas variables toman como valores rectas y puntos. En ese caso la geometría presenta *una única estructura* con variables (α y β) a sustituir adecuadamente. La geometría *es* esta estructura, suponiendo obviamente las reglas de sustitución de las variables. Éstas, por tanto, no poseen, como es obvio, una designación fija, es decir, valores euclídeos físicos determinados (lo cual responde, de paso —y negativamente—, la primera pregunta).

El salto producido frente a la geometría física euclídea es notorio, y esto constituye ya no un modo nuevo de construir la *misma* geometría, sino una nueva manera de concebir la geometría y sus objetos. La estructura presentada, a través de un conjunto de propiedades (axiomas y teoremas), desplaza la idea previamente básica de propiedades *de* los puntos y *de* las rectas.

De esta manera se cumple un cambio acerca de lo sustancial en la geometría. Este cambio se ha atribuido tradicionalmente a momentos posteriores y distintos al caso de la geometría proyectiva. Sin embargo, no cabe duda alguna que *ya* en ésta aparece, en la forma como se presentan los sistemas deductivos, un salto radical, y no sólo un perfeccionamiento más o un desarrollo de formas geométricas preexistentes. Por ello, insistimos, la presentación dual expresa, hace explícito, un modo distinto de encarar las propiedades geométricas. Con la especificidad introducida por la dualidad se trata de algo más que del mero descubrimiento de teoremas.

Una somera comparación con el caso de la geometría analítica antes referido muestra notorias diferencias, dentro de una línea de desarrollo que nos interesará indicar luego.

En el paso anterior —geometría analítica— el lenguaje de la geometría había cambiado, pasando a llamarse 'punto' un par ordenado de números reales y 'recta' una ecuación de determinado tipo. Pero la *separación* entre los dos tipos de entes se mantenía, más allá del hecho de que ciertas propiedades de números y ecuaciones "reflejasen" propiedades de puntos y rectas estrictamente euclídeos. Por otra parte, la *fisicidad* de la geometría analítica, por lo menos en sus formas primitivas, la enlazaba con su predecesora euclídea. Por el contrario, las características señaladas de la geometría proyectiva hacen ya de ella una geometría no-euclídea, aunque en un sentido muy especial de la palabra. Teniendo en cuenta la posición de Frege respecto a la concepción hilbertiana de la geometría "euclídea",[4] no es inútil señalar el

[4] G. Frege, *On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic*, Yale University Press, New Haven, 1971.

paso nada desdeñable dado ya por la geometría proyectiva en la concepción misma de la geometría, y aun de la matemática y de los sistemas deductivos en general. Ese paso es sólo uno de los posibles, y de los efectivamente realizados, más tarde, en ese sentido. Sólo que posee, por el momento en que fue dado, una significación histórica particularmente señalable. Por ello, antes de ver en qué otras formas se abandonó el carácter físico de la geometría, había que señalar este hito. Dejarlo de lado, pasando en forma excesivamente rápida y *ligera* a considerar otros momentos, sería desconocer una verdadera revolución científica, error, a nuestro modo de ver, soslayable pero no infrecuente.

5. El episodio más conocido en la aparición de nuevas geometrías, de geometrías divergentes, es el de las no-euclidianas. Por ser el más espectacular ha merecido cuidadosa consideración y probablemente se le ha atribuido una importancia impar. Sin embargo, los hitos que venimos señalando muestran que, lejos de ser un acontecimiento único, es sólo parte de un proceso extendido a lo largo de manifestaciones muy diversas.

Que no se trata de un episodio puntual resulta claro a poco que se considere su historia y su prehistoria —por ejemplo, a través del conocido trabajo de Bonola y de otros historiógrafos.[5] Los problemas que planteó el postulado quinto, las dudas que generó su pretendida demostrabilidad a partir de los demás de la geometría euclídea, muestran ya la riqueza de una historia nutrida. Cuando Saccheri, por otra parte lógico de relieve, encaró en su *Euclides*...[6] la demostración mediante una forma especial de razonamiento por el absurdo, llegó en realidad a casi construir una geometría no-euclídea sin percatarse de ello. Un error en ciertos pasos deductivos lo llevó a *cerrar* su demostración y, por tanto, a "reivindicar" al gran geómetra griego.

Justamente ese hecho es particularmente significativo como caso de resistencia al cambio, a un cambio ciertamente radical. La postura "ideológica" de Saccheri —concebir el sistema euclidiano como la única geometría posible, aunque no se lo planteara explícitamente así— fue facilitada por ese error técnico. La reivindicación fue a la vez deseada y ficticia. Pero dado ese episodio, el trabajo de Saccheri no pudo llegar a constituir una tradición científica no-euclídea y, por tanto, su mérito en ese sentido pudo surgir sólo a través de estudios historiográficos posteriores, sin influir significativamente en el desarrollo inmediato y en la creación histórica de esas geometrías. A tal punto no estaba preparada la comunidad científica para un descubrimiento de ese tipo, que no sólo se constata la resistencia de Saccheri a admitir una novedad como la indicada, sino que aun la obra de los fundadores estrictos, Bolyai y Lobatchevsky, tardó mucho en ser apreciada en su real significado. Dicha

[5] *Cfr.* L. Godeaux, *Les Geómetries,* Colin, París, 1960.
[6] G. B. Halsted, *Girolamo Saccheri's Euclides Vindicatus,* Open Court, Chicago, 1920.

resistencia aparece, pues, como otra característica en esta revolución de las ciencias deductivas. El análisis de las causas estrictas de esa resistencia es algo que queda por realizar, más allá de las someras propuestas conocidas (en general sociopsicológicas y algo superficiales); interesaría sobre todo estudiar el grado en el que se presenta en distintos momentos científicos, cuestión en la que no podemos entrar aquí.

Las geometrías no euclídeas, tanto parabólicas como elípticas, son claramente geometrías no-físicas, como lo era ya la geometría proyectiva. La propuesta de un axioma divergente con el quinto postulado euclídeo introduce un conjunto de problemas, es cierto, pero *resuelve* en la práctica una "situación" metacientífica *desde la propia construcción científica*. Cuando digo que *resuelve* quiero significar que con la introducción de ese axioma se abandona, al menos, la inmediata representación física de la geometría. Pero si se nos dijera que este es sólo un supuesto de la geometría entonces dominante, y no una aserción explícita, podríamos encarar de un modo distinto la novedad que se introduce.

Los *Segundos Analíticos* presentan una teoría de los sistemas deductivos, una metateoría filosófica que ha sido bien estudiada, extremadamente elaborada para su momento y que sin duda se aplica —con algunas variantes no decisivas en lo que nos interesa aquí— al sistema euclídeo. La evidencia y la necesidad del postulado quinto son exigencias de esa metateoría que, en realidad, no hacen sino explicitar exigencias comunes en el pensamiento griego con relación a los axiomas. Así, ya se considere, o no, aplicable a los *Elementos* la teoría aristotélica de los sistemas deductivos, en todo caso se trata de una concepción bien establecida y presente en éstos; diversas fuentes lo indican. Pero si se admite esa aplicabilidad, entonces lo que está en cuestión es no ya sólo una opinión imperante o un supuesto, sino una metateoría explícita en el *Organon* aristotélico.

Esa evidencia y esa necesidad requeridas por Aristóteles pasan, por otra parte, a ser lo que está en cuestión en las geometrías no-euclídeas, y lo está sin duda alguna. Sólo que, a nuestro modo de ver, es sólo *uno* de los elementos que el proceso que estamos describiendo —a través de un somero análisis de casos pertinentes— pone en cuestión en la forma de hacer geometría, especialmente a partir del siglo diecinueve. Al resultado del proceso le hemos llamado, para abreviar, geometría no-física, pero sus caracteres requieren especificarse, y los momentos y el sentido de su aparición, analizarse.

Si el quinto axioma euclídeo no es ni evidente ni necesario, lo cual se ha señalado repetidamente, entonces algo fundamental ha sido abandonado en el campo científico y en el metacientífico. Y ello tiene que ver, además, con los problemas de la posible aplicación física de geometrías cuyos axiomas no son ni evidentes ni necesarios, cosa impensable con anterioridad, pero ésta es otra historia en la que no vamos a entrar. Tal hecho tiene que ver, además —y ello también ha sido estudiado—, con la viabilidad de la teoría kantiana del conocimiento y de la ciencia, pese a las piruetas que los kantianos han realizado para salvarla de la herida de muerte que el desarrollo científico le produjo.

Por otra parte, con la aparición de geometrías no físicas comienzan a plantearse problemas de consistencia. Si la consistencia era natural en el caso de la geometría preexistente, ya no lo es en los nuevos sistemas. Si bien los *modelos de Beltrami y de Poincaré, modelos "euclídeos" de geometrías que* no lo son, permiten encarar de un modo especial el problema de la consistencia —consistencia relativa—, eso no impide que el problema general surja como inevitable. Por ello, si en ciertos casos particulares de consistencia de los sistemas deductivos el problema es limitado, la mera presencia de sistemas *geométricos no físicos* hace vislumbrar las dificultades que luego van a mostrarse en su plenitud. Por eso las nuevas geometrías adelantan cuestiones que en Hilbert estallaron. Por otra parte, el tema de la independencia de los axiomas, que también en Hilbert aparece explícitamente tratado, se había hecho manifiesto en la prehistoria de las geometrías no euclídeas. Conociendo la diferente importancia que poseen ambos tipos de cuestiones —la de consistencia (especialmente delicada, según lo mostró la historia de la matemática y la de la metamatemática)—, podemos también, en este sentido, insistir en la importancia de las derivaciones del aporte de Bolyai, Lobatchevsky y Riemann.

6. Cada uno de los hitos señalados en la revolución de la geometría —en rigor, de *las* geometrías— ha marcado pasos específicos de un proceso en desarrollo. Si bien, de hecho, la aparición de las geometrías no euclídeas significa un conjunto de consecuencias del tipo señalado, sin embargo, por las razones apuntadas, debemos insistir en la significación de los demás pasos. En especial, hay que recalcar que no se ha dado a la geometría proyectiva todo el valor que posee en este sentido; puede afirmarse que, en el camino hacia la geometría abstracta, constituye un mojón específico de gran importancia.

De Euclides a Hilbert —sin contar los pasos intermedios—, ¿se produce una revolución científica? ¿Se trata de una serie de "pequeñas" revoluciones que se reflejan nítidamente en el sistema "euclídeo" de Hilbert? Con la pluralidad de geometrías no físicas, ¿estamos ante una superrevolución, o —para no usar superlativos prescindibles— ante una revolución de tipo distinto a las demás, la cual se concretaría en los *Grundlagen der Geometrie*? ¿Qué aportan nuestros *casos* para el concepto mismo de "revolución científica" en geometría o, más en general, en las ciencias deductivas? Son problemas que apenas podemos abordar. ¿Dónde *se fecha* esta transformación tan significativa, este giro en la historia intelectual? En la literatura filosófica o historiográfica no se ha dado solución a esta pregunta y poco es, también aquí, lo que podemos aportar por el momento.

7. En 1882, Pasch recoge parte de los resultados del trabajo de transformación de la geometría en su *Vorlesungen über Neuere Geometrie*,[7] y expresa lo que implícitamente se daba en ese desarrollo en una forma sin duda más primitiva de la que va a aparecer en Hilbert. Así, para que la geometría llegue a ser ciencia deductiva debe procederse, según Pasch, en forma independiente tanto del sentido de los conceptos geométricos como de las figuras; sólo las relaciones entre dichos conceptos deben constituir el tema de estudio. Sin embargo, la presencia de huecos deductivos podría todavía, para Pasch, justificar que se pensara en el significado de los conceptos; pero el ideal es otro. Éste se expresa al requerirse *a)* el establecimiento de los términos primitivos (con los cuales van a definirse los demás), *b)* la enunciación de las proposiciones primitivas, base de la demostración de las restantes, y *c)* que el sentido de los términos primitivos no intervenga ni en las proposiciones primitivas ni en las demostraciones, siendo exclusivamente lógicas las relaciones correspondientes. Con este criterio Pasch define todos los conceptos geométricos en base a los términos primitivos "punto", "plano" y "segmento" y a la relación no definida "superponible a"; de este modo desarrolla, consiguientemente, una geometría como ciencia deductiva, acorde con su nuevo ideal. La peculiaridad de tomar "segmento" como término primitivo muestra en sí misma la libertad característica de los sistemas geométricos construidos con la nueva óptica. Aunque Pasch no innova fundamentalmente, sí explicita un momento importante del proceso y produce un sistema geométrico modestamente original, cuya originalidad estaba justamente *vedada* en la concepción ortodoxa de los sistemas deductivos.

8. Hilbert presenta en sus *Grundlagen der Geometrie*[8] un sistema de veintiún axiomas distribuídos en cinco grupos —de enlace, de orden, de paralelismo, de congruencia y de continuidad— como reconstrucción de la geometría de Euclides.

Dicha reconstrucción evita, en primer lugar, los saltos en el razonamiento, los "huecos" contenidos en los *Elementos*, y resulta un modelo de rigor. Ya los *Elementos* euclídeos intentaban demostraciones rigurosas, y a menudo las lograban, pero, bien por suponer muy a menudo definiciones, postulados, nociones comunes o teoremas que no se explicitaban, bien por no indicar reglas de deducción lógica, interesaba contar con una construcción que llenara de modo adecuado tales vacíos; eso es lo que hacen los *Grundlagen*.[9]

En segundo lugar, la separación de los axiomas en grupos permite pre-

[7] M. Pasch, *Vorlesungen über Neuere Geometrie*, 1882.

[8] Euclides, *Elementos de Geometría;* precedidos de los *Fundamentos de la Geometría* de D. Hilbert, Universidad Nacional Autónoma de México, 1944.

[9] A. Tarski, *On the Limitations of the Means of Expression of Deductive Theories*, Clarendon Press, Oxford, 1956.

sentar una sección de la geometría que use sólo las propiedades de enlace, o de enlace y orden, *por ejemplo, sin tener en cuenta las* que *derivan del* postulado quinto, o las que surgen del axioma de Arquímedes o de los de congruencia. De tal modo, se hacen claras en la propia construcción de la geometría euclídea las posibilidades de geometrías más débiles.

En tercer lugar, puntos, rectas y planos son tres clases de "entes", que "*aparecen*" *en los axiomas "definidos implícitamente"; términos que de por* sí no tienen contenido propio, fijo, y que figuran relacionados así por términos tales como "estar en", "entre", "paralelo", "congruente" y "continuo", mismos que en el correspondiente grupo de axiomas aparecen a su vez definidos implícitamente. Los términos primitivos aparecen así indefinidos en *principio, pudiendo referirse, como dijimos, a cualesquiera clases de entes que* satisfagan los axiomas. En este sentido, y sólo en éste, se dirá que los axiomas los definen implícitamente.[10]

En cuarto lugar, los *Grundlagen* no sólo presentan el sistema geométrico en forma deductiva, con las características señaladas, sino que, además, presentan el tema de la no contradicción y de la independencia mutua de los axiomas. Ello se impone al poseer los términos primitivos una indeterminación como la señalada y carecer, por tanto, de referencias físicas. Si bien este tema ya estaba impuesto en el descubrimiento de nuevas geometrías, aquí se presenta de modo sistemático y, además, se dan caminos para resolver los problemas de no contradicción e independencia. Con respecto a lo primero, el problema de consistencia se traslada al correspondiente de la geometría analítica tomada como modelo; y respecto a lo segundo, se trabaja sobre el principio de que, para demostrar la independencia de un axioma dado, basta con mostrar que pueden hallarse casos en los que los demás axiomas se satisfagan y, a la vez, se satisfaga un axioma distinto de aquél.

Ahora bien, una geometría con los caracteres que presenta la de los *Grundlagen* es algo totalmente diferente a la de los *Elementos,* pese a tratarse en ambos casos de geometrías euclídeas, es decir, pese a que poseen axiomas de paralelismo equivalentes. Los cuatro puntos señalados respecto a los *Grundlagen* bastan para constatar lo anterior; no es necesario introducirnos en la problemática abierta por Hilbert en obras posteriores.

Más que incidir en la oposición entre el sistema de Euclides y el de Lobatchevsky, *por ejemplo, insistimos en la contrastación entre* aquél y el de Hilbert para reiterar el enorme paso dado, entre uno y otro, en la "misma" geometría; si bien, en este caso, las comillas deberían aplicarse más a geometría que a "misma" —es decir, a propiedades geométricas que se dan en uno y otro caso—, para distinguir dos concepciones totalmente distintas de la "*ciencia del espacio*". *Entre esos dos momentos,* debe afirmarse, aconteció una

[10] *Cfr.* M. H. Otero, "Les definitions implicites chez Gergonne", en *Revue d'Histoire des Sciences et de Leurs Applicattions,* 1969.

significativa revolución. Las designaciones de los términos geométricos dieron paso a variables geométricas y se alteró la naturaleza lógica de los axiomas —no ya sólo su carácter de evidencia o necesidad—: de proposiciones, pasaron a ser funciones proposicionales. Pero, además de los cambios naturalmente aparentes, se abre con sentido, como vemos, una problemática *científica* acerca de los caracteres formales (no contradicción, independencia) de los sistemas geométricos en su conjunto, resoluble mediante procedimientos *internos* a la disciplina en cuestión o a las "anteriores" a ella, o mediante consideraciones metacientíficas muy específicas, y para nada por vagas cuestiones especulativas. Estamos lejos de pensar que todo esto fue obra de Hilbert, que todo ello nació de golpe y completo en la cabeza de Hilbert. Afirmamos que justamente el proceso de producción de geometría a lo largo de una serie de hitos —de los que apenas hemos señalado algunos—, es lo que conduce a los *Grundlagen.* ¿Constituyen éstos propiamente una revolución científica? Sí y no. Sí en el sentido de que recogen en geometría los resultados de un trabajo muy prolongado en cuyo proceso los entes geométricos comenzaron a abandonar la forma descriptiva en que aparecían en los *Elementos.* Por su parte, algunos de los mojones que hemos someramente señalado constituyen en sí mismos revoluciones científicas. De modo que el caso de Hilbert, en el cual se engloban los resultados de un proceso que incluye varias revoluciones científicas, debería ser llamado, como decíamos antes, una superrevolución —al aportar descubrimientos y fraguar concepciones más allá de las que recoge—, pero a fin de evitar excesos verbales, quizás convenga concluir afirmando que la palabra "revolución" se refiere a procesos de distinto nivel e importancia, y de esta manera concordar con tantos autores que consideran injustificado pensar que el término "revolución científica" acota un solo tipo de fenómenos. Pues una cosa es introducir un "quinto postulado" distinto, con todo lo que esto conlleva, y otra es construir una geometría cuya concepción general sea radicalmente nueva al punto de generar *problemas científicos de naturaleza distinta* y no sólo objetos de un nuevo tipo. Lejos estamos de pensar que una revolución de nueva especie está fechada con la aparición de los *Grundlagen* —este problema de fijar el momento en que se da una revolución es especialmente difícil y, además, ¿hay un momento tal?—; sólo decimos que en esa obra se hace patente de un modo ejemplar la transformación *ya* realizada. Por otra parte, el desarrollo contemporáneo de las matemáticas y de la geometría en especial, la práctica geométrica y la práctica matemática muestran a cada paso, hasta hoy, el resultado de tal cambio de concepción. Lo que aparece natural —el carácter abstracto, no físico de estas disciplinas— fue de hecho el resultado de un esfuerzo continuado de producción científica, con saltos por cierto marcados. Por ello, el proceso de producción configura un caso de especial interés para contrastar la conceptuación metateórica y, en especial, para mostrar la adecuación explicativa del concepto de "revolución científica" y sus conceptos correlativos; se trata de una tarea abierta para la cual apenas hemos realizado algunas observaciones aisladas.

MARIO H. OTERO

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO