

Alberto Moretti y Guillermo Hurtado (comps.), *La paradoja de Orayen*, EUDEBA, Buenos Aires, 2003, 106 pp. (Enciclopedia Lógica)

Estoy seguro de que los lógicos frecuentemente sospechan que existe una dificultad como la que acabo de mostrar, pero, hasta donde mis amigos y yo sabemos, la paradoja de la que me ocupo en este trabajo no ha sido enunciada explícitamente en la bibliografía.

RAÚL ORAYEN

### 1. *Introducción*

*La paradoja de Orayen* es una compilación de trabajos de varios profesionales de la lógica que discuten un problema acerca de la interrelación entre la teoría de conjuntos y la semántica de la teoría cuantificacional que identificó el doctor Raúl Orayen. La obra contiene cuatro artículos de investigación, tres cartas dirigidas a Orayen y otros tres textos que sitúan el problema que este libro aborda en un contexto técnico, histórico y bibliográfico. El planteamiento de la paradoja es relativamente sencillo y puede explicarse más o menos sin tecnicismos, pero sus diversas soluciones requieren una elaboración formal rigurosa.

El objetivo de esta reseña es dar una explicación intuitiva del problema que conduce a la paradoja de Orayen y de sus posibles soluciones, pero no pretende mostrar cómo se elaboraron estas soluciones ni dar los detalles matemáticos de tal paradoja. Me concentraré en exponer las motivaciones filosóficas y en explicar intuitivamente las definiciones y demostraciones que subyacen a los argumentos involucrados en este problema. Lo que intento simplemente es interesar al lector en el aspecto filosófico de este problema y, por tanto, inducirlo a que conozca a fondo su planteamiento mediante la lectura del libro objeto de esta reseña.

A continuación presentaré brevemente algunos antecedentes sobre la teoría de conjuntos y la teoría de modelos para situar el problema que dio origen a la paradoja de Orayen. Después intruduciré las diversas reacciones que produjo el problema, así como las soluciones expuestas en los diversos artículos de esta compilación; luego describiré el resto de los textos, que nos proporcionan un panorama filosófico y académico alrededor de este problema. Finalizaré haciendo algunos comentarios y ofreciendo razones para recomendar esta obra.

### 2. *Antecedentes*

La teoría de conjuntos fue propuesta originalmente por Georg Cantor a fines del siglo XIX y, al ser axiomatizada por Bertrand Russell a principios del siglo XX, resultó ser una teoría matemática inconsistente. Esto significa que de ella se puede derivar tanto una aserción como su negación, lo cual genera una contradicción que a su vez conduce a una paradoja. En su momento se hicieron diversas propuestas de solución; una de ellas la planteó el mismo Russell en su teoría de tipos; otra más es la teoría Zermelo-Fraenkel, que es la más usada hoy en día y que constituye la

teoría de conjuntos moderna. Las diversas propuestas de solución apuntan en la dirección de impedir la generación del conjunto universal (el conjunto de todos los conjuntos), cuya permisión es precisamente lo que lleva a la conocida paradoja de Russell.

La importancia de trabajar con teorías de primer orden consistentes en matemáticas, y en general en la ciencia, no sólo radica en la aspiración obvia de manejar teorías de las que no se deriven contradicciones, sino en el hecho de poder obtener los resultados metalógicos más importantes de la lógica de primer orden, a saber, el teorema de correctud y el teorema de completud (probado por Gödel en 1930), los cuales en su versión más actual postulan precisamente una equivalencia entre las nociones de satisfactibilidad y consistencia: “un conjunto de fórmulas es satisfactible<sup>1</sup> si y sólo si es consistente” (probada por Henkin en 1949). Con estos resultados podemos asegurar que las teorías consistentes tienen una representación matemática que caracteriza la estructura del conjunto de fórmulas que conforma la teoría. La prueba de Henkin sienta las bases de la teoría de modelos tal como la conocemos hoy en día.

La teoría de modelos surge del enfoque semántico de la lógica matemática por medio del cual se caracterizan las nociones de verdad, interpretación y consecuencia lógica. Este enfoque necesita la teoría de conjuntos moderna para su expresión y maquinaria. Por ejemplo, una fórmula  $f$  es una consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas  $T$  si (la intersección de) los modelos de las premisas están contenidos en los modelos de la conclusión. Un modelo consiste en un dominio (representado por un conjunto no vacío) y funciones de interpretación para los símbolos de constantes, de función y de predicado del lenguaje cuantificacional en cuestión. La teoría de modelos se ocupa, entre otras cosas, de caracterizar clases de modelos que satisfacen ciertos conjuntos de fórmulas y establecer relaciones y equivalencias entre estructuras.

### 3. La paradoja

La paradoja de Orayen es un problema que identificó el doctor Orayen y que presentó originalmente en ocasión de un simposio organizado en Granada, España, en 1986 sobre la obra de Quine. Lo que Orayen muestra es lo siguiente:

surge una paradoja cuando el lógico adopta definiciones y hace afirmaciones como las que siguen:

- (1) la semántica de  $TQ$  (Teoría Cuantificacional) se construye con la ayuda de  $T$  (Teoría de conjuntos tipo Zermelo-Fraenkel); en particular, se adopta la restricción de que sólo conjuntos provistos por  $T$  pueden usarse como dominios de interpretación.
- (2) Se dice que  $T$  puede ser formalizada dentro de  $TQ$  (i.e., puede ser expresada por una teoría de orden uno). (p. 37)

<sup>1</sup> Un conjunto de fórmulas es satisfactible si tiene un modelo. Como veremos más adelante, esto significa que puede construirse una estructura con un dominio y funciones de interpretación del lenguaje.

No es posible aceptar simultáneamente estas dos afirmaciones, ya que si atendemos a (1), entonces la teoría de conjuntos no puede ser formalizada en el sentido de (2). Orayen muestra cómo al construir la semántica de  $TQ$  con la herramienta de  $T$  no puede obtenerse un dominio apropiado para tal teoría, esto es, un dominio que adopte la restricción de que sólo conjuntos provistos por la teoría de conjuntos puedan usarse como dominios de interpretación. El dominio requerido apela justamente al conjunto universal!

La descripción de este problema aparece publicada en *Diánoia* bajo el título “La teoría de modelos vista desde los ojos de Dios” (vol. 38, 1992, pp. 161–170). Su formulación original, sin embargo, está expuesta en un artículo un tanto más extendido y que forma parte de esta compilación: “Una paradoja semántica de la teoría de conjuntos” (pp. 33–57). Parece que el doctor Orayen elaboró este trabajo durante un largo periodo y que la última versión es la publicada en esta obra.

Antes de su publicación en *Diánoia*, este problema fue bautizado precisamente como “la paradoja de Orayen” por el lógico argentino Carlos Alchourrón, en su artículo “On the Philosophical Adequacy of Set Theories”, publicado en *Theoria* (vol. 2, 1987, pp. 567–574) y traducido al castellano para esta compilación con el nombre “Sobre la adecuación filosófica en las teorías de conjuntos” (pp. 59–67). En este artículo, Alchourrón se propone convencernos de que las teorías de conjuntos al estilo de la de Zermelo-Fraenkel son inadecuadas desde el punto de vista filosófico; en él arguye que si bien este tipo de teorías son matemáticamente muy precisas y gozan de propiedades muy deseadas, como la de consistencia, las razones de su aceptación como teorías son matemáticas y no filosóficas, pues son de hecho filosóficamente inadecuadas. Alchourrón expone el problema propuesto por Orayen como un ejemplo que confirma su tesis y lo bautiza como paradoja, aunque admite claramente que no se trata de una contradicción formal. Con este problema muestra que tanto las nociones conjuntistas modernas de interpretación como la mismísima noción de conjunto conllevan problemas filosóficos que no padece la teoría cantoriana de conjuntos.

Por su lado, Adolfo García de la Sienna, en su artículo intitulado “La paradoja de Orayen” (pp. 69–79), apunta a algunas consecuencias importantes una vez que se reconoce la paradoja de Orayen como un problema filosófico auténtico. Una de ellas es que la teoría de modelos es sólo una teoría más específica de la teoría de estructuras y que “la Teoría de Modelos es una gran teoría de clases cuya semántica a su vez no se puede elucidar mediante las nociones de la Teoría de Estructuras, ya no digamos desde la Teoría de Modelos” (p. 77). Una consecuencia de esta paradoja fatal para la filosofía de la ciencia, y en particular para el enfoque estructuralista, es que cuestiona la reconstrucción de teorías científicas a partir de la definición de predicados conjuntistas.

Finalmente, Mario Gómez Torrente, en su artículo “Notas sobre la paradoja de Orayen” (pp. 81–92), cuestiona el nombre de “paradoja” que Alchourrón propuso para bautizar el problema identificado por Orayen y que el resto pareció aceptar tal cual. La objeción radica en que, a su parecer, “el razonamiento en el que Raúl Orayen ha visto la fuerza de una paradoja se apoya en esta falsa idea como premisa” (p. 82); esa falsa premisa es la idea de que los modelos aceptables de los lenguajes formales son conjuntos (o se corresponden de

manera inmediata con conjuntos). Lo que Gómez Torrente cuestiona es que esta premisa sea un supuesto sobre el que se basan los lógicos de la teoría de modelos.

#### 4. *Soluciones*

Orayen no sólo expuso la paradoja que lleva su nombre, sino que además ofreció dos posibles soluciones. La primera de ellas apela a una semántica no conjuntística basada en la adopción de predicados en castellano para interpretar los predicados formales. Esto es, propone una nueva forma de interpretar los símbolos del lenguaje cuantificacional. La segunda solución de Orayen nos recuerda el estilo de la teoría jerarquizada de tipos de Russell (propuesta para resolver la paradoja de conjuntos), en el sentido de que propone que “toda noción de conjunto pertenece a un nivel de una cierta jerarquía, y al enunciar esta tesis se usa una noción de conjunto que no pertenece a ningún nivel de tal jerarquía” (p. 57).

Alchourrón acepta la primera solución de Orayen y señala como una virtud que aunque implica renunciar a la noción conjuntística estándar de interpretación, en su lugar ofrece una noción que carece de compromisos ontológicos con clases. Sin embargo, Alchourrón se inclina por una alternativa más radical a la solución de la paradoja, que implica renunciar a las teorías de conjuntos que no admitan la clase universal. Esto es, se queda con la propuesta original de Cantor y sacrifica sin reparo la consistencia a cambio de su adecuación filosófica.

Por su lado, García de la Sienra señala que la semántica de la lógica de primer orden debe ser reformulada y que la segunda solución de Orayen muestra que “hay una jerarquía de teorías y que dentro de esa jerarquía la Teoría de Modelos se encuentra en realidad bastante abajo. Por lo tanto, la Teoría de Modelos no puede ser una semántica completamente general, ni siquiera para la lógica de primer orden” (p. 77).

Para Gómez Torrente, sin embargo, las soluciones que ofrece Orayen resultan innecesarias, ya que no hay, en primer lugar, motivo alguno para rechazar el supuesto conjuntístico de la teoría de modelos, esto es, “que cualquier resultado matemático de la Teoría de Modelos se corresponderá con una verdad análoga acerca de estructuras conjuntísticas” (p. 81), pero acepta que Orayen no tenía en mente plantear una alternativa a este supuesto; más bien quería caracterizar una noción de modelo aceptable. Además, Gómez Torrente cuestiona la primera solución de Orayen para el caso de la lógica de segundo orden. Finalmente observa, sobre la segunda solución, que ésta sugiere una tesis un poco más débil que el supuesto que desemboca en la paradoja, algo así como “cualquier verdad matemática de la Teoría de Modelos estándar se corresponde con una verdad análoga acerca de las estructuras conjuntísticas y/o algunas de las primeras hiper-clases” (p. 91).

#### 5. *Cartas y otros textos*

Además de los artículos ya mencionados, esta compilación contiene tres cartas breves de filósofos reconocidos que reaccionan a la paradoja de Orayen; a saber, W.V.O. Quine, Hilary Putnam y William Hart. En la primera de ellas, fechada en 1986, Quine le escribe a Orayen lo siguiente: “no recuerdo haber siquiera pensado

en su sutil observación adicional, respecto de que la lógica de predicados no puede ser aplicada consistentemente a la teoría de conjuntos si tal aplicación se explica a la manera de la Teoría de Modelos” (p. 93).

Putnam, por su parte, opina que “la novedad del artículo es la enunciación formal de la distinción entre dos sentidos diferentes de ‘interpretación’ de una teoría de primer orden” (p. 95). Putnam además comenta las soluciones propuestas por Orayen y da preferencia a la segunda, aunque advierte lo siguiente: “lo que usted provee no es una definición de verdad, sino un conjunto infinito de axiomas. En cuanto uno trata de convertir esta lista en una definición explícita, se usa la teoría de conjuntos nuevamente!” (p. 96). Cabe aclarar que Putnam se refiere aquí al artículo publicado en *Diánoia*, el que Raúl Orayen preparó ex profeso para un simposio dedicado a Putnam celebrado en Taxco, México, en 1992; sin embargo, es posible que Putnam haya leído también el texto de Orayen que se presenta en esta compilación. Por último, en su carta, Hart hace referencia al artículo de Alchourrón, en particular al recurso que éste propone del sistema NF (New Foundations) de Quine en respuesta a la paradoja de Orayen. Sobre ello muestra que en esta solución persiste la paradoja y concluye que: “ninguna teoría de conjuntos es suficiente para todas las semánticas, especialmente la suya propia” (p. 98).

Esta compilación contiene, además, un texto escrito por el director de la colección Enciclopedia Lógica, de la cual esta compilación forma parte. En ese texto, Eduardo Barrio presenta la herramienta técnica necesaria de la teoría de modelos para comprender los artículos contenidos en la compilación. Esta exposición contrasta con la de esta reseña, donde me he propuesto dar un mínimo de tecnicismos y no exponer ninguna de las pruebas. Sin embargo, para aproximarse al libro, la lectura de esta introducción resulta necesaria.

Los compiladores Alberto Moretti y Guillermo Hurtado presentan, cada uno por su parte, una introducción (pp. 19–22) de cómo surgió el problema que originó la paradoja de Orayen y además ofrecen un panorama de la filosofía de Raúl Orayen (pp. 23–29). Del texto de Hurtado aprendemos que las diversas áreas de interés de Orayen, a saber, la ontología, la filosofía del lenguaje y la filosofía de la lógica, constituyen las partes de una visión integradora de la filosofía, que Orayen expuso en su obra más importante: *Lógica, significado y ontología*, de la cual puede decirse que: “los primeros cuatro capítulos del libro pueden leerse como una larga respuesta de Orayen a la filosofía de la lógica de Quine” (p. 27). Por lo tanto, no parece ser una casualidad que Orayen haya encontrado su paradoja justamente estudiando a fondo los sistemas de Quine. De hecho, está claro que la primera solución a la paradoja se inspira en una de sus obras, como sugieren sus propias palabras: “Mates utilizaba predicados castellanos para presentar conjuntos (las correspondientes extensiones), pero pueden ser usados para proporcionar maneras de leer las letras predicativas, y Quine ha mostrado cómo hacer eso en *Methods of Logic* y otros trabajos” (p. 40). Por otro lado, Moretti nos describe el contexto del problema mismo de la paradoja, cómo fue que Orayen la concibió originalmente, así como los diversos eventos académicos que giraron alrededor de la discusión de este problema. En particular, me parece muy relevante citar sus palabras iniciales que hacen referencia a la última actividad académica en la que participó el doctor Orayen: “En marzo del 2002, el Instituto de Investigaciones Filosóficas de la Universidad Nacional Autónoma de México organizó un coloquio en homenaje a Raúl Orayen”

(p. 19). Este coloquio dio origen a la iniciativa de publicación de la antología *De la forma lógica al significado* (en preparación, compilada por Maite Ezcurdia), en la cual se publicarán tanto los artículos presentados en el homenaje como las respuestas de Raúl Orayen a cada uno de ellos. Uno de los artículos es el de García de la Sienra que aparece en esta compilación, por lo que será interesante ver la respuesta que Orayen le dio.

## 6. Comentarios finales

El problema que identificó Raúl Orayen es una aportación a la filosofía de la lógica en el sentido más estricto, ya que reflexiona filosóficamente sobre un aspecto técnico en la lógica, el de intentar tomar como base la teoría de conjuntos para construir la semántica de la lógica cuantificacional y al mismo tiempo usar la teoría cuantificacional para formalizar la teoría de conjuntos. Esta reflexión cuestiona la noción de conjunto y, por tanto, la fundamentación misma de las matemáticas con base en la teoría de conjuntos moderna, esto es, la teoría de Zermelo-Fraenkel. Orayen muestra que si bien esta teoría es consistente y se salva de la paradoja de Russell, resulta insuficiente para construir la semántica de la lógica de primer orden, ya que, al intentarlo, genera otra paradoja, la paradoja de Orayen.

Como muestran los artículos y las cartas contenidos en esta compilación, hay problemas filosóficos todavía sin solución en la interrelación entre la teoría de conjuntos y la teoría de modelos. Mientras que algunos opinan que el problema identificado por Orayen no califica como una paradoja auténtica, otros deciden renunciar a la teoría de conjuntos moderna para su solución. El resto de las soluciones propuestas apelan a nuevas nociones de modelo e interpretación de la semántica de la lógica de primer orden. Esta diversidad es sólo el reflejo de que es posible construir varias respuestas para los problemas de la filosofía de la lógica, y que si bien su continuo análisis esclarece los problemas planteados, no ofrece respuestas definitivas.

Por el carácter técnico del problema que aborda, la lectura de este texto puede resultar un tanto densa; sin embargo, por un lado, los textos del director de la colección y de los compiladores ofrecen una muy buena introducción y una panorámica del contexto en el que se originó y se desarrolló la paradoja de Orayen; por otro lado, si bien el resto de los textos son de naturaleza técnica, todos ellos explican las motivaciones y las consecuencias filosóficas de la paradoja de Orayen.

Es interesante hacer notar que el problema que Orayen formuló, su posterior desarrollo y las respuestas de diversos investigadores se plantearon de origen en un contexto hispanoparlante; en el marco de diversas reuniones académicas realizadas en España y en México, y entre investigadores de España, México y Argentina. Esto da un valor especial a este libro, pues reúne por primera vez en castellano estos trabajos sobre la paradoja de Orayen. Otra virtud de este texto, y que aligera lo denso del material, es que con su lectura no sólo se aprende el planteamiento de un problema y sus posibles soluciones, sino que también nos enteramos de su historia y del contexto en el que se planteó; esto es, nos describe su *contexto de descubrimiento*. Esta forma de presentación rara vez ocurre en la discusión de los problemas en lógica.

La compilación constituye un espacio de diálogo entre lógicos profesionales del mundo hispanoparlante (o conectados con él) que se unen para discutir un problema planteado por su colega Raúl Orayen y que ellos tratan de analizar críticamente. La Enciclopedia Lógica de la editorial argentina EUDEBA es el espacio ideal para este tipo de obras en castellano. Además de esta compilación, en esa colección están publicados varios libros sobre lógica, uno de ellos es de Mario Gómez Torrente (*Forma y modalidad*) y otro es la traducción de un excelente libro de texto en inglés, escrito por autores holandeses (*Introducción a la lógica*, de L.F.T. Gamut), que, por cierto, a Raúl Orayen le gustaba usar en sus clases.

ATOCHA ALISEDA  
*Instituto de Investigaciones Filosóficas*  
*Universidad Nacional Autónoma de México*  
 atocha@filosoficas.unam.mx

Soares, Lucas, *Anaximandro y la tragedia. La proyección de su filosofía en la Antígona de Sófocles*, Biblos, Buenos Aires, 2002, 157 pp.

La obra de Lucas Soares no es un texto más acerca del pensamiento del filósofo presocrático Anaximandro. El autor toma como base las fuentes directas griegas y una literatura especializada excelente muy vasta y actualizada para llevar a cabo una lectura heterodoxa del filósofo milesio, y propone en su libro una tesis sumamente controversial acerca del fragmento 12 B 1 de Anaximandro: que dicho fragmento prefigura el núcleo del conflicto trágico desarrollado en la tragedia *Antígona*. La lectura de Soares del fragmento 12 B 1 prosigue, en cierto modo, la línea de interpretación jurídico-moral de Jaeger, pero adopta un curso propio, ya que asume la siguiente hipótesis:

partimos del supuesto de que Anaximandro, al hablar de “las cosas” que expían culpa entre sí, se estaría refiriendo a dos órdenes de “legalidades contrapuestas” y, más específicamente, al enfrentamiento mutuo que “de acuerdo con el ordenamiento del tiempo”, se da entre ellas, las cuales a su vez se generan y se destruyen, “según la necesidad”, dentro del seno de lo *ápeiron* (concebido como “lo divino”). (pp. 61–62)

La perspectiva hermenéutica desde la cual se sitúa el autor para comprender el fragmento de Anaximandro no se limita al escueto texto 12 B 1 del filósofo presocrático ni se ciñe del todo a él. Su exégesis procura partir del mundo cultural y político al que perteneció Anaximandro y abarcar, incluso, el horizonte de la *polis* clásica. Soares pretende, en suma, aproximarse al fragmento de Anaximandro “desde la perspectiva de *Antígona*” (p. 31).

El autor es consciente de las dificultades de la empresa que se propone realizar, hace explícitos los presupuestos básicos de su interpretación (p. 63) y esgrime algunos argumentos a favor de su interpretación del término anaximandreo ‘las cosas’ como ‘legalidades contrapuestas’: