Diánoia, vol. 2, no. 2, 1956

OPERACIONES METÓDICAS DE LA LÓGICA DIALÉCTICA

Nuestra *Introducción a la lógica dialéctica*, que en breve aparecerá publicada, tiene como desarrollo necesario el estudio en detalle de los varios aspectos operatorios y epistemológicos que constituyen la generalidad del método materialista dialéctico. Como parte de este examen, presentamos ahora algunas de las operaciones metódicas cuya sistematización hemos obtenido como fruto de las investigaciones que venimos efectuando en el Centro de Estudios Filosóficos de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Como advertencia común, señalamos que toda operación representa un procedimiento para obtener una relación judicativa, partiendo de uno o más juicios que expresan conocimientos ya adquiridos o, por lo menos, postulados. Pero, en todo caso, ni la veracidad de los juicios de que se parte, ni tampoco la corrección formal del procedimiento seguido, constituyen condiciones *suficientes para comprobar la veracidad de la relación obtenida*. Lo que resulta, como consecuencia de ejecutar una operación racional fundamentada, es siempre una relación hipotética. Y para lograr la verificación científica de cualquier hipótesis es indispensable someterla a la prueba del experimento. Es más, cuando se omite la comprobación objetiva del resultado, la operación lógica se convierte en una operación puramente formal y carente de valor como instrumento metódico. Por lo tanto, las operaciones dialécticas, por sí solas, no suministran la solución de los problemas concretos del conocimiento; sino que, al par que se las utiliza es indispensable efectuar una investigación específica y completa en cada caso, apegándose a las manifestaciones objetivas del proceso existente que se trate de conocer.

1. *Expresión de los juicios*

De acuerdo con la notación de Boole simplificada que hemos adoptado,[1] tenemos los siguientes símbolos elementales:

1	Significa existencia, afirmación, veracidad o cumplimiento del conjunto de relaciones consideradas.
0	Representa inexistencia, negación, falsedad o incumplimiento del conjunto de relaciones consideradas.
x, y, z	Representan clases de procesos o de aspectos de los procesos.

[1] Véase su presentación completa en "La fase deductiva del método materialista dialéctico", *Diánoia*, I, 1955; págs. 69-103.

$(1-x), (1-y), (1-z)$	Denotan las clases opuestas, respectivamente, a: x, y, z; en las cuales están incluídos los procesos o los aspectos contrarios.
$x+y+z$ $z+(1-y)$ $y+z+(1-x)$	Expresan la simultaneidad en el cumplimiento o en el incumplimiento de varias clases.
xy, yz, zx $y(1-x), z(1-y)$ $xyz, yz(1-x)$	Indican la conjugación entre diversas clases.

Conforme a este simbolismo, los 14 juicios simples se expresan por medio de las relaciones entre dos términos, *x* e *y*, y sus correspondientes opuestos $(1-x)$ y $(1-y)$, que son: xy, $x(1-y)$, $y(1-x)$, $(1-x)(1-y)$. Entonces, resultan las siguientes expresiones:

Juicio de Prófasis: $xy + x(1-y) = 1$; o sea: $x = 1$
Ejemplo: *e* es un número, sea algebraico o no.

Juicio de Prófasis Inversa: $xy + y(1-x) = 1$; o sea: $y = 1$
Ejemplo: El vanadio es un elemento químico, haya sido descubierto por Andrés del Río o no.[2]

Juicio de Antífasis: $y(1-x) + (1-x)(1-y) = 1$; de donde: $1-x=1$
Ejemplo: El cero no es sucesor de un número natural, independientemente de que se le considere como número natural o de que no se le considere así.

Juicio de Antífasis Inversa: $x(1-y) + (1-x)(1-y) = 1$; de donde: $1-y=1$
Ejemplo: La luna no tiene luz propia, independientemente de que sea o no sea fragmento de una estrella.[3]

Juicio de Conjunción: $xy = 1$
Ejemplo: Algunos caracteres hereditarios son dominantes.

[2] La diferencia entre el juicio profático y el juicio profático inverso se encuentra únicamente en la consideración del término principal como *x* o como *y*. Pero, una vez decidida dicha consideración, el juicio inverso resulta ser diferente; así, en el ejemplo, la inversión de los términos produce esta relación distinta: El vanadio fue descubierto por Andrés del Río, sea o no un elemento químico.

[3] El juicio antifático y el juicio antifático inverso se distinguen solamente por la consideración del término principal como el opuesto de *x* o como el contrario de *y*. Sin embargo, después de haber escogido la representación de uno de ellos, la inversión del juicio produce una relación distinta; como se ilustra con el inverso del juicio tomado por ejemplo: La luna no es un fragmento de estrella, tenga o no luz propia.

Juicio de Discordancia: $x(1 - y) = 1$; o sea: $x - xy = 1$

Ejemplo: Algunos isótopos de los elementos más livianos que el plomo no son átomos estables.

Juicio de Discordancia Inversa: $y(1 - x) = 1$; o sea: $y - xy = 1$

Ejemplo: Algunos polígonos equiláteros no son equiángulos.[4]

Juicio de Heterófasis: $(1 - x)(1 - y) = 1$; de donde resulta: $1 - x + xy - y = 1$

Ejemplo: Existen ecuaciones que no son algebraicas ni tienen solución.

Juicio de Inclusión: $xy + x(1 - y) + y(1 - x) = 1$; de donde se obtiene: $x - xy + y = 1$

Ejemplo: Todo animal es metazoario o se reproduce asexuadamente, o bien, es metazoario y se reproduce asexuadamente.

Juicio de Incompatibilidad: $x(1 - y) + y(1 - x) + (1 - x)(1 - y) = 1$; de donde: $1 - xy = 1$

Ejemplo: Todo número racional, en función de divisor de otro número racional, produce como cociente un número entero, o un número fraccionario, o no produce cociente alguno.

Juicio de Implicación: $xy + x(1 - y) + (1 - x)(1 - y) = 1$; o sea: $1 - y + xy = 1$

Ejemplo: Todo número es entero y racional, o es racional y no es entero, o bien, no es racional ni entero.

Juicio de Implicación Inversa: $xy + y(1 - x) + (1 - x)(1 - y) = 1$; de donde: $1 - x + xy = 1$

Ejemplo: Todo animal con cráneo es cordado.[5]

Juicio de Exclusión: $x(1 - y) + y(1 - x) = 1$; de donde se obtiene: $x - 2xy + y = 1$

Ejemplo: Una serie infinita es convergente, o es divergente, pero no es convergente y divergente a la vez.

[4] La distinción entre el juicio discordante y el juicio discordante inverso sólo radica en la consideración del término positivo como x o como y. No obstante, luego que se ha adoptado una u otra, la inversión del juicio establece una relación diferente, tal como se advierte al invertir el ejemplo: Algunos polígonos equiángulos no son equiláteros.

[5] El juicio implicante sólo difiere del juicio implicante inverso por la consideración que se haga del término positivo como x o como y. Pero, una vez hecha esa consideración, la inversión del juicio produce una relación distinta; tal como queda en claro al invertir el ejemplo: Todo animal cordado tiene cráneo.

Juicio de Reciprocidad: $xy + (1 - x)(1 - y) = 1$; de donde: $1 - x + 2xy - y = 1$

Ejemplo: Toda ecuación de segundo grado con dos incógnitas representa una curva cónica, y toda curva cónica representa una ecuación de segundo grado con dos incógnitas.

2. *Matrices de veracidad*

Las llamadas "tablas de verdad" o "matrices de veracidad" plantean a la lógica simbólica el problema de que resultan ser indemostrables, cuando se emplea alguna de las muchas notaciones propuestas por los lógicos matemáticos posteriores a Boole. Y, por lo tanto, su aceptación implica siempre la necesidad de introducirlas con el carácter de convenciones o axiomas. En cambio, con la notación que aquí utilizamos sí quedan demostradas rigurosamente, con lo cual se obtiene una simplificación importante en la estructura interna de la lógica expresada simbólicamente. Para conseguir esta demostración es suficiente con substituir en la ecuación correspondiente a cada juicio las siguientes parejas de valores para las variables: $x = 1, y = 1$; $x = 0, y = 1$; $x = 1, y = 0$; $x = 0, y = 0$. Dicho de otra manera, se considera el cumplimiento del juicio cuya matriz se trata de formar, junto con el cumplimiento simultáneo de los juicios: profático y profático inverso; antifático y profático inverso; profático y antifático inverso; y, antifático y antifático inverso. De este modo obtenemos los resultados que siguen:

Juicio de conjunción: $xy = 1$

Si:		Entonces:	Luego es:
$x = 1$	$y = 1$	$1 \cdot 1 = 1$	Verdadero
$x = 0$	$y = 1$	$0 \cdot 1 = 1$	Falso
$x = 1$	$y = 0$	$1 \cdot 0 = 1$	Falso
$x = 0$	$y = 0$	$0 \cdot 0 = 1$	Falso

Juicio de discordancia: $x - xy = 1$

Si:		Entonces:	Luego es:
$x = 1$	$y = 1$	$1 - 1 \cdot 1 = 1$	Falso
$x = 0$	$y = 1$	$0 - 0 \cdot 1 = 1$	Falso
$x = 1$	$y = 0$	$1 - 1 \cdot 0 = 1$	Verdadero
$x = 0$	$y = 0$	$0 - 0 \cdot 0 = 1$	Falso

Juicio de discordancia inversa: $y - xy = 1$			
Si:		Entonces:	Luego es:
$x = 1$	$y = 1$	$1 - 1 \cdot 1 = 1$	Falso
$x = 0$	$y = 1$	$1 - 0 \cdot 1 = 1$	Verdadero
$x = 1$	$y = 0$	$0 - 1 \cdot 0 = 1$	Falso
$x = 0$	$y = 0$	$0 - 0 \cdot 0 = 1$	Falso

Juicio de heterófasis: $1 - x + xy - y = 1$			
Si:		Entonces:	Luego es:
$x = 1$	$y = 1$	$1 - 1 + 1 \cdot 1 - 1 = 1$	Falso
$x = 0$	$y = 1$	$1 - 0 + 0 \cdot 1 - 1 = 1$	Falso
$x = 1$	$y = 0$	$1 - 1 + 1 \cdot 0 - 0 = 1$	Falso
$x = 0$	$y = 0$	$1 - 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 1$	Verdadero

Juicio de inclusión: $x - xy + y = 1$			
Si:		Entonces:	Luego es:
$x = 1$	$y = 1$	$1 - 1 \cdot 1 + 1 = 1$	Verdadero
$x = 0$	$y = 1$	$0 - 0 \cdot 1 + 1 = 1$	Verdadero
$x = 1$	$y = 0$	$1 - 1 \cdot 0 + 0 = 1$	Verdadero
$x = 0$	$y = 0$	$0 - 0 \cdot 0 + 0 = 1$	Falso

Juicio de incompatibilidad: $1 - xy = 1$			
Si:		Entonces:	Luego es:
$x = 1$	$y = 1$	$1 - 1 \cdot 1 = 1$	Falso
$x = 0$	$y = 1$	$1 - 0 \cdot 1 = 1$	Verdadero
$x = 1$	$y = 0$	$1 - 1 \cdot 0 = 1$	Verdadero
$x = 0$	$y = 0$	$1 - 0 \cdot 0 = 1$	Verdadero

Juicio de implicación: $1 - y + xy = 1$			
Si:		Entonces:	Luego es:
$x = 1$	$y = 1$	$1 - 1 + 1 \cdot 1 = 1$	Verdadero
$x = 0$	$y = 1$	$1 - 1 + 0 \cdot 1 = 1$	Falso
$x = 1$	$y = 0$	$1 - 0 + 1 \cdot 0 = 1$	Verdadero
$x = 0$	$y = 0$	$1 - 0 + 0 \cdot 0 = 1$	Verdadero

Juicio de implicación inversa: $1 - x + xy = 1$			
Si:		Entonces:	Luego es:
$x = 1$	$y = 1$	$1 - 1 + 1 \cdot 1 = 1$	Verdadero
$x = 0$	$y = 1$	$1 - 0 + 0 \cdot 1 = 1$	Verdadero
$x = 1$	$y = 0$	$1 - 1 + 1 \cdot 0 = 1$	Falso
$x = 0$	$y = 0$	$1 - 0 + 0 \cdot 0 = 1$	Verdadero

Juicio de exclusión: $x - 2xy + y = 1$			
Si:		Entonces:	Luego es:
$x = 1$	$y = 1$	$1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 = 1$	Falso
$x = 0$	$y = 1$	$0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 + 1 = 1$	Verdadero
$x = 1$	$y = 0$	$1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 + 0 = 1$	Verdadero
$x = 0$	$y = 0$	$0 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 = 1$	Falso

Juicio de reciprocidad: $1 - x + 2xy - y = 1$			
Si:		Entonces:	Luego es:
$x = 1$	$y = 1$	$1 - 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 = 1$	Verdadero
$x = 0$	$y = 1$	$1 - 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 - 1 = 1$	Falso
$x = 1$	$y = 0$	$1 - 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 - 0 = 1$	Falso
$x = 0$	$y = 0$	$1 - 0 + 2 \cdot 0 \cdot 0 - 0 = 1$	Verdadero

3. *Doble negación*

Las catorce formas del juicio constituyen parejas de relaciones antitéticas, de tal manera que cada miembro de una pareja es la negación del otro, tal como se muestra en seguida:

Tesis:	*Antítesis:*
Prófasis: $x = 1$	Antífasis: $1 - x = 1$
Prófasis Inversa: $y = 1$	Antífasis Inversa: $1 - y = 1$
Conjunción: $xy = 1$	Incompatibilidad: $1 - xy = 1$
Discordancia: $x - xy = 1$	Implicación Inversa: $1 - x + xy = 1$
Discordancia Inversa: $y - xy = 1$	Implicación: $1 - y + xy = 1$
Inclusión: $x - xy + y = 1$	Heterófasis: $1 - x + xy - y = 1$
Exclusión: $x - 2xy + y = 1$	Reciprocidad: $1 - x + 2xy - y = 1$

En otro sentido, también se establece oposición entre dos juicios cuando se substituyen ambos términos por sus respectivos opuestos. De esta manera, tenemos:

Tesis:	*Antítesis:*
Prófasis: $x = 1$	Antífasis: $1 - x = 1$
Prófasis Inversa: $y = 1$	Antífasis Inversa: $1 - y = 1$
Conjunción: $xy = 1$	Heterófasis: $(1 - x)(1 - y) = 1$
Discordancia: $x(1 - y) = 1$	Discordancia Inversa: $y(1 - x) = 1$
Inclusión: $x - xy + y = 1$	Incompatibilidad: $(1 - x) - (1 - x)(1 - y) + (1 - y) = 1$
Implicación: $1 - y + xy = 1$	Implicación Inversa: $1 - (1 - y) + (1 - x)(1 - y) = 1$
Exclusión: $x - 2xy + y = 1$	Exclusión: $(1 - x) - 2(1 - x)(1 - y) + (1 - y) = 1$
Reciprocidad: $1 - x + 2xy - y = 1$	Reciprocidad: $1 - (1 - x) + 2(1 - x)(1 - y) - (1 - y) = 1$.

Por lo tanto, el juicio excluyente es la antítesis de sí mismo:

$$x - 2xy + y = (1 - x) - 2(1 - x)(1 - y) + (1 - y)$$

Y, por su parte, el juicio reciprocante se encuentra en oposición consigo mismo:

$$1 - x + 2xy - y = 1 - (1 - x) + 2(1 - x)(1 - y) - (1 - y)\ [6]$$

Otra forma más de negar un juicio es la de substituir cada término por el opuesto del otro término. De esta manera se obtienen los siguientes resultados:

[6] D. Hilbert and W. Ackermann, *Principles of Mathematical Logic,* Chelsea Publishing Company, New York, 1950; equivalencia (26), pág. 9.

Tesis:

Prófasis: $x = 1$
Prófasis Inversa: $y = 1$
Conjunción: $xy = 1$
Discordancia: $x - xy = 1$

Discordancia Inversa: $y - xy = 1$

Inclusión: $x - xy + y = 1$

Implicación: $1 - y + xy = 1$

Implicación Inversa: $1 - x + xy = 1$

Exclusión: $x - 2xy + y = 1$

Reciprocidad: $1 - x + 2xy - y = 1$

Antítesis:

Antífasis Inversa: $1 - y = 1$
Antífasis: $1 - x = 1$
Heterófasis: $(1 - y)(1 - x) = 1$
Discordancia:
$(1 - y) - (1 - y)(1 - x) = 1$
Discordancia Inversa:
$(1 - x) - (1 - y)(1 - x) = 1$
Incompatibilidad:
$(1 - y) - (1 - y)(1 - x) + (1 - x) = 1$
Implicación:
$1 - (1 - x) + (1 - y)(1 - x) = 1$
Implicación Inversa:
$1 - (1 - y) + (1 - y)(1 - x) = 1$
Exclusión:
$(1 - y) - 2(1 - y)(1 - x) + (1 - x) = 1$
Reciprocidad:
$1 - (1 - y) + 2(1 - y)(1 - x) - (1 - x) = 1$

Entonces, además de los juicios excluyente y reciprocante, que vuelven a ser opuestos consigo mismos, tenemos otros cuatro casos semejantes. El juicio discordante también tiene esta propiedad:

$$x - xy = (1 - y) - (1 - y)(1 - x)$$

y lo mismo ocurre con el juicio discordante inverso:

$$y - xy = (1 - x) - (1 - x)(1 - y)$$

con el implicante:

$$1 - y + xy = 1 - (1 - x) + (1 - y)(1 - x)$$

y con el implicante inverso:

$$1 - x + xy = 1 - (1 - y) + (1 - y)(1 - x) \text{ [7]}$$

Ahora bien, la doble negación de un juicio implica el negar formalmente su negación y, en consecuencia, equivale al propio juicio. En sus diversas formas, esta propiedad se desarrolla así:

El juicio profático es igual al juicio antifático negado:

$$x = [1 - (1 - x)] \text{ [8]}$$

[7] Hilbert, *op. cit.*, equivalencia (23), pág. 9.
[8] *idem;* equivalencia (1), pág. 6.

El juicio antifático es igual al juicio profático negado:

$$(1 - x) = [1 - (x)]$$

El juicio profático inverso es igual al juicio antifático inverso negado:

$$y = [1 - (1 - y)]$$

El juicio antifático inverso es igual al juicio profático inverso negado:

$$(1 - y) = [1 - (y)]$$

El juicio conjugante es igual al juicio incompatible negado:

$$xy = [1 - (1 - xy)]$$

El juicio discordante es igual al juicio implicante inverso negado:

$$x - xy = [1 - (1 - x + xy)]$$

El juicio discordante inverso es igual al juicio implicante negado:

$$y - xy = [1 - (1 - y + xy)]$$

El juicio heterofático es igual al juicio incluyente negado:

$$(1 - x + xy - y) = [1 - (x - xy + y)]$$

El juicio incluyente es igual al juicio heterofático negado:

$$(x - xy + y) = [1 - (1 - x + xy - y)]$$ [9]

El juicio incompatible es igual al juicio conjugante negado:

$$(1 - xy) = [1 - (xy)]$$

El juicio implicante es igual al juicio discordante inverso negado:

$$(1 - y + xy) = [1 - (y - xy)]$$

El juicio implicante inverso es igual al juicio discordante negado:

$$(1 - x + xy) = [1 - (x - xy)]$$ [10]

[9] *idem;* equivalencias (22) y (27), págs. 9 y 10.
[10] *idem;* equivalencia (20), pág. 9.

El juicio excluyente es igual al juicio reciprocante negado:

$$(x - 2xy + y) = [1 - (1 - x + 2xy - y)]$$

El juicio reciprocante es igual al juicio excluyente negado:

$$(1 - x + 2xy - y) = [1 - (x - 2xy + y)]$$

4. *Complementariedad de la conjunción*

La conjunción de dos juicios antitéticos siempre es nula. O sea, dicho de otro modo, que la conjugación entre juicios opuestos es complementaria en el sentido de su exclusión recíproca. Esta operación queda demostrada como sigue:

El cumplimiento del juicio profático (x) excluye el cumplimiento del juicio antifático (1 — x) y viceversa:

$$x(1 - x) = 0$$ [11]

El cumplimiento del juicio profático inverso (y) es recíprocamente excluyente del cumplimiento del juicio antifático inverso (1 — y):

$$y(1 - y) = 0$$

El juicio conjugante (xy) y el juicio incompatible (1 — xy) se excluyen mutuamente en su cumplimiento:

$$xy(1 - xy) = 0$$

El juicio discordante (x — xy) y el juicio implicante inverso (1 — x + xy) son exclusivos entre sí:

$$(x - xy)\ (1 - x + xy) = 0$$

El juicio discordante inverso (y — xy) y el juicio implicante (1 — y + xy) son mutuamente excluyentes en su cumplimiento:

$$(y - xy)\ (1 - y + xy) = 0$$

El cumplimiento del juicio heterofático (1 — x + xy — y) excluye el cumplimiento del juicio incluyente (x — xy + y) y viceversa:

$$(1 - x + xy - y)\ (x - xy + y) = 0$$

[11] La ecuación general del juicio conjugante es: $xy = 1$; y, por consiguiente, basta con substituir a x por su valor particular (x) y a y por el suyo (1 — x).

El juicio excluyente $(x - 2xy + y)$ y el juicio reciprocante $(1 - x + + 2xy - y)$ son mutuamente exclusivos:

$$(x - 2xy + y)\ (1 - x + 2xy - y) = 0$$

5. *Complementariedad de la inclusión*

La inclusión de dos juicios antitéticos siempre es válida. Esto es, en otras palabras, que la inclusión entre juicios contradictorios es complementaria en el sentido de su cumplimiento simultáneo. La operación queda demostrada en todos los casos, como sigue:

El cumplimiento del juicio profático (x) es compatible con el cumplimiento de su opuesto el juicio antifático $(1 - x)$:

$$(x) - (x)\ (1 - x) + (1 - x) = 1$$ [12]

El juicio profático inverso (y) se cumple simultáneamente con su contrario el juicio antifático inverso $(1 - y)$:

$$(y) - (y)\ (1 - y) + (1 - y) = 1$$

El juicio conjugante (xy) y su contradictorio el juicio incompatible $(1 - xy)$ tienen cumplimiento simultáneo:

$$(xy) - (xy)\ (1 - xy) + (1 - xy) = 1$$

El juicio discordante $(x - xy)$ y su opuesto el juicio implicante inverso $(1 - x + xy)$ se cumplen a la vez:

$$(x - xy) - (x - xy)\ (1 - x + xy) + (1 - x + xy) = 1$$

El juicio discordante inverso $(y - xy)$ se cumple simultáneamente con su contrario el juicio implicante $(1 - y + xy)$:

$$(y - xy) - (y - xy)\ (1 - y + xy) + (1 - y + xy) = 1$$

El juicio heterofático $(1 - x + xy - y)$ y su contradictorio el juicio incluyente $(x - xy + y)$ se cumplen a la vez:

$$(1 - x + xy - y) - (1 - x + xy - y)\ (x - xy + y) + (x - xy + y) = 1$$

[12] En la ecuación general del juicio incluyente: $x - xy + y = 1$, se substituyen las variables por sus valores particulares (x) y $(1 - x)$, respectivamente.

El juicio excluyente $(x - 2xy + y)$ tiene cumplimiento simultáneamente con su opuesto el juicio reciprocante $(1 - x + 2xy - y)$:

$$(x - 2xy + y) - (x - 2xy + y)(1 - x + 2xy - y) + (1 - x + 2xy - y) = 1$$

6. *Tautificación*

La operación de tautificación representa la relación de un término consigo mismo —por ejemplo, la conexión de x con x— en las varias formas del juicio. Ejecutando esta operación, se obtienen los siguientes resultados:

Conjunción: $x \cdot x = x$;[13] o sea, que una clase se absorbe al conjugarse consigo misma.

Discordancia: $x - x \cdot x = 0$; es decir, que no existe la discordancia de una clase con sí misma.

Discordancia inversa: $x - x \cdot x = 0$; esto es, que no existe la discordancia inversa de una clase consigo misma.

Heterófasis: $(1 - x)(1 - x) = 1 - x$; la conexión heterofática de una clase con sí misma tiene como resultado el opuesto de dicha clase.

Inclusión: $x - x \cdot x + x = x$;[14] la parte está contenida en el todo, o bien, el todo está incluído en sí mismo.

Incompatibilidad: $1 - x \cdot x = 1 - x$; la incompatibilidad de una clase consigo misma equivale a la clase contraria.

Implicación: $1 - x + x \cdot x = 1$; toda clase se implica a sí misma.

Implicación inversa: $1 - x + x \cdot x = 1$; una clase está contenida íntegramente en sí misma.

Exclusión: $x - 2x \cdot x + x = 0$; una clase nunca se excluye a sí misma.

Reciprocidad: $1 - x + 2x \cdot x - x = 1$; toda clase es equivalente respecto de sí misma.

7. *Oposición*

La operación de oposición consiste en relacionar a un término con su opuesto —por ejemplo, en conectar (x) con $(1 - x)$— conforme a los diversos tipos de juicio. De esta manera se llega a los resultados que siguen:

Conjunción: $x(1 - x) = 0$; esto es, que es imposible la conjugación de una clase con su contradictoria.

Discordancia: $x - x(1 - x) = x$; o sea, que la discordancia entre una clase y su opuesta produce la absorción de la segunda en la primera.

Discordancia inversa: $(1 - x) - x(1 - x) = 1 - x$; la discordancia in-

[13] Hilbert, *op. cit.;* equivalencia (8), pág. 7.
[14] *idem;* equivalencia (9), pág. 7.

versa entre una clase y su contraria produce la absorción de la primera en la segunda.

Heterófasis: $(1 - x)[1 - (1 - x)] = 0$; es imposible la falta de cumplimiento de una clase simultáneamente al incumplimiento de la clase opuesta.

Inclusión: $x - x(1 - x) + (1 - x) = 1$; es posible el cumplimiento simultáneo de una clase y su contradictoria.

Incompatibilidad: $1 - x(1 - x) = 1$; dos clases opuestas pueden dejar de cumplirse a la vez.

Implicación: $1 - (1 - x) + x(1 - x) = x$; la implicación de una clase con su contraria tiene como resultado la absorción de la segunda por la primera.

Implicación inversa: $1 - x + x(1 - x) = 1 - x$; la implicación inversa de una clase con su contradictoria produce la absorción de la primera por la segunda.

Exclusión: $x - 2x(1 - x) + (1 - x) = 1$; la exclusión entre una clase y su opuesta siempre se cumple.

Reciprocidad: $1 - x + 2x(1 - x) - (1 - x) = 0$; la equivalencia entre una clase y su opuesta nunca se cumple.

8. *Confirmación*

La operación de confirmar consiste en conectar a un término con la existencia del otro término –por ejemplo, a *x* con *1*– de acuerdo con las distintas relaciones del juicio. Al efectuar esta operación se encuentran los siguientes resultados:

Conjunción: $x \cdot 1 = x$;[15] es decir, conocida la conjugación entre dos términos, el cumplimiento de uno de ellos confirma el cumplimiento del otro.

Discordancia: $x - x \cdot 1 = 0$; esto es, conocida la discordancia entre dos términos, el cumplimiento del segundo no confirma el cumplimiento del primero.

Discordancia inversa: $1 - x \cdot 1 = 1 - x$; partiendo de la discordancia inversa entre dos términos, el cumplimiento del segundo confirma el cumplimiento del opuesto al primero.

Heterófasis: $(1 - x)(1 - 1) = 0$; conocida la conjugación entre los opuestos de dos términos, el cumplimiento de uno de los términos no confirma el cumplimiento del otro.

Inclusión: $x - x \cdot 1 + 1 = 1$;[16] partiendo de la inclusión entre dos términos, el cumplimiento de uno de ellos no excluye el cumplimiento del otro.

Incompatibilidad: $1 - x \cdot 1 = 1 - x$; conocida la incompatibilidad entre

[15] *idem;* equivalencia (10), pág. 8.
[16] *idem;* equivalencia (12), pág. 8.

dos términos, el cumplimiento de uno de ellos confirma el cumplimiento necesario del opuesto al otro.

Implicación: $1 - 1 + x \cdot 1 = x$;[17] dada la implicación entre dos términos, el cumplimiento del segundo confirma necesariamente el cumplimiento del primero.

Implicación inversa: $1 - x + 1 \cdot x = 1$; dada la implicación inversa entre dos términos, el cumplimiento del segundo no excluye el cumplimiento del opuesto al primero.

Exclusión: $x - 2x \cdot 1 + 1 = 1 - x$; partiendo de la exclusión entre dos términos, el cumplimiento de uno de ellos confirma su equivalencia con el opuesto al otro.

Reciprocidad: $1 - x + 2x \cdot 1 - 1 = x$;[18] conocida la reciprocidad entre dos términos, el cumplimiento de uno de ellos confirma su equivalencia con el otro término.

9. *Refutación*

La operación de refutar establece la relación entre un término y la inexistencia del otro término —por ejemplo, la conexión de x con 0— en las *diversas formas del juicio.* Efectuando esta operación nos encontramos con los siguientes desarrollos:

Conjunción: $x \cdot 0 = 0$;[19] o sea, que conocida la conjugación entre dos términos, el incumplimiento de uno de ellos refuta el cumplimiento íntegro del otro.

Discordancia: $x - x \cdot 0 = x$; es decir, sabida la discordancia entre dos términos, el incumplimiento del segundo confirma el cumplimiento del primero.

Discordancia inversa: $0 - 0 \cdot x = 0$; partiendo de la discordancia inversa entre dos términos, el incumplimiento del segundo refuta el cumplimiento íntegro del opuesto al primero.

Heterófasis: $(1 - x)(1 - 0) = 1 - x$; teniendo por sabida la conjugación entre los opuestos de dos términos, el incumplimiento de un término confirma el cumplimiento del opuesto al otro término.

Inclusión: $x - x \cdot 0 + 0 = x$;[20] partiendo de la inclusión entre dos términos, el incumplimiento de uno de ellos confirma el cumplimiento necesario del otro término.

Incompatibilidad: $1 - x \cdot 0 = 1$; conocida la incompatibilidad entre dos términos, el incumplimiento de uno de ellos no excluye el cumplimiento del opuesto al otro término.

[17] *idem;* equivalencia (14), pág. 8.
[18] *idem;* equivalencia (16), pág. 8.
[19] *idem;* equivalencia (11), pág. 8.
[20] *idem;* equivalencia (13), pág. 8.

Implicación: $1 - 0 + 0 \cdot x = 1$,[21] dada la implicación entre dos términos, el incumplimiento del segundo no excluye el cumplimiento del primero.

Implicación inversa: $1 - x + x \cdot 0 = 1 - x$; dada la implicación inversa entre dos términos, el incumplimiento del segundo confirma necesariamente el cumplimiento del opuesto al primer término.

Exclusión: $x - 2x \cdot 0 + 0 = x$; partiendo de la exclusión entre dos términos, el incumplimiento de un término confirma su equivalencia con el cumplimiento del otro término.

Reciprocidad: $1 - x + 2x \cdot 0 - 0 = 1 - x$;[22] dada la reciprocidad entre dos términos, el incumplimiento de un término confirma su equivalencia con el incumplimiento del otro término.

10. *Formas conjugantes e incluyentes de los juicios*

Todos los juicios se pueden expresar en forma conjugante, tal como lo indicamos a continuación. En cada caso, al efectuar las operaciones algebraicas señaladas se llega a la ecuación establecida anteriormente para el juicio en cuestión.

La conjunción expresa la conjugación entre ambos términos, o sea:

$$xy = (xy)$$

La discordancia representa la conjugación entre un término y el opuesto al otro, es decir:

$$x(1 - y) = (x - xy)$$

La discordancia inversa es la conjugación entre el otro término y el contrario al primero, esto es:

$$y(1 - x) = (y - xy)$$

La heterófasis señala la conjugación entre los contrarios de ambos términos; esto es:

$$(1 - x)(1 - y) = (1 - x + xy - y)$$

La inclusión indica la negación de la conjugación entre los contrarios de ambos términos, o sea:

$$[1 - (1 - x)(1 - y)] = (x - xy + y)$$

21 *idem;* equivalencia (15), pág. 8.
22 *idem;* equivalencia (17), pág. 8.

La incompatibilidad establece la negación de la conjunción entre los dos términos, esto es:

$$[1 - (xy)] = (1 - xy)$$

La implicación denota la negación de la conjugación entre el segundo término y el opuesto al primero, o sea:

$$[1 - y(1 - x)] = (1 - y + xy)$$

La implicación inversa representa la negación de la conjunción entre el primer término y el contrario del segundo, es decir:

$$[1 - x(1 - y)] = (1 - x + xy)$$

La exclusión representa la conjugación del juicio incluyente con el juicio incompatible, es decir:

$$(x - xy + y)\,(1 - xy) = (x - 2xy + y)$$

La reciprocidad denota la conjugación del juicio implicante con el juicio implicante inverso, o sea:

$$(1 - y + xy)\,(1 - x + xy) = (1 - x + 2xy - y)$$ [23]

Por otra parte, los juicios también son susceptibles de adoptar la forma incluyente, según lo ponemos de manifiesto en seguida:

El juicio de conjunción representa la negación de la inclusión entre los opuestos de ambos términos, o sea:

$$\{\, 1 - [(1 - x) - (1 - x)\,(1 - y) + (1 - y)] \,\} = (xy)$$ [24]

El juicio discordante denota la negación de la inclusión del opuesto al primer término con el segundo término, es decir:

$$\{\, 1 - [(1 - x) - y(1 - x) + y] \,\} = (x - xy)$$

El juicio discordante inverso señala la negación de la inclusión entre el primer término y el contrario al otro, o sea:

$$\{\, 1 - [x - x(1 - y) + (1 - y)] \,\} = (y - xy)$$

[23] *idem;* equivalencia (24), pág. 9.
[24] *idem;* equivalencia (28), pág. 10.

El juicio heterofático indica la negación de la inclusión entre ambos términos, o sea:

$$[1 - (x - xy + y)] = (1 - x + xy - y)$$

El juicio incluyente expresa la inclusión entre los dos términos, es decir:

$$x - xy + y = (x - xy + y)$$

El juicio incompatible representa la inclusión entre los contradictorios de ambos términos, o sea:

$$[(1 - x) - (1 - x)\ (1 - y) + (1 - y)] = (1 - xy)$$

El juicio implicante establece la inclusión entre un término y el contrario al otro término, esto es:

$$[x - x(1 - y) + (1 - y)] = (1 - y + xy)$$

El juicio implicante inverso expresa la inclusión del otro término con el opuesto al primero, es decir:

$$[y - y(1 - x) + (1 - x)] = (1 - x + xy)$$ [25]

El juicio excluyente es la inclusión del juicio discordante con el juicio discordante inverso, o sea:

$$[(x - xy) - (x - xy)\ (y - xy) + (y - xy)] = (x - 2xy + y)$$

El juicio reciprocante denota la inclusión entre el juicio conjugante y el juicio heterofático, esto es:

$$[(xy) - (xy)\ (1 - x + xy - y) + (1 - x + xy - y)] = (1 - x + 2xy - y)$$ [26]

Por otro lado, se puede representar a los juicios excluyente y reciprocante por medio de la conjugación de dos inclusiones, tal como lo hacemos a continuación:

El juicio excluyente señala la conjugación entre la inclusión de los dos términos —juicio incluyente— y la inclusión de los opuestos de ambos términos —juicio incompatible—; esto es:

$$[x - xy + y]\ [(1 - x) - (1 - x)\ (1 - y) + (1 - y)] = (x - 2xy + y)$$

[25] *idem;* equivalencia (21), pág. 9.
[26] *idem;* equivalencia (30), pág. 11.

El juicio reciprocante indica la conjugación entre la inclusión del primer término con el opuesto al segundo –juicio implicante– y la inclusión del opuesto al primer término con el segundo término –juicio implicante inverso–; esto es:

$$[x - x(1 - y) + (1 - y)]\ [(1 - x) - y(1 - x) + y] = (1 - x + 2xy - y)$$ [27]

11. *Leyes de Morgan*

Las dos leyes originales de Morgan establecen la equivalencia entre la conjunción negada y la inclusión de los opuestos de ambos términos y, por otro lado, la equivalencia entre la inclusión negada y la conjunción de los dos términos contrarios. Esta propiedad la podemos generalizar a las otras formas del juicio, considerando a la conjunción y a la inclusión como relaciones elementales y mutuamente opuestas. Entonces, encontramos que la negación de un juicio es equivalente a la relación elemental contraria establecida entre los términos opuestos a los del juicio negado. Así, tenemos:

La negación de la conjunción entre ambos términos equivale a la inclusión de ambos opuestos:

$$[1 - xy] = [(1 - x) - (1 - x)\ (1 - y) + (1 - y)]$$ [28]

Como se advierte fácilmente, en cada miembro de esta ecuación tenemos una diferente expresión de la incompatibilidad.

La negación de la conjunción entre un término y el opuesto al otro, equivale a la inclusión entre el contrario al primer término y el segundo término:

$$[1 - x(1 - y)] = [(1 - x) - (1 - x)y + y]$$

Se trata, por lo tanto, de la igualdad entre dos expresiones de la implicación inversa.

La negación de la conjunción entre el otro término y el contrario al primero, equivale a la inclusión del opuesto al otro término con el primer término:

$$[1 - y(1 - x)] = [(1 - y) - (1 - y)x + x]$$

Se trata, entonces, de dos representaciones distintas de la implicación.

La negación de la conjunción entre los opuestos de ambos términos, equivale a la inclusión de los dos términos:

$$[1 - (1 - x)\ (1 - y)] = [x - xy + y]$$

[27] *idem;* equivalencia (29); pág. 11.
[28] *idem;* equivalencia (18), pág. 8; es la primera ley de Morgan.

O sea, que los dos miembros corresponden a diferentes expresiones de la inclusión.

La negación de la inclusión entre ambos términos equivale a la conjunción entre los contrarios de los dos términos:

$$[1 - (x - xy + y)] = [(1 - x)\ (1 - y)]$$ [29]

Es decir, que tenemos dos expresiones de la heterófasis.

La negación de la inclusión entre los contrarios de ambos términos, equivale a la conjunción de los dos términos:

$$\{1 - [(1 - x) - (1 - x)\ (1 - y) + (1 - y)]\} = [xy]$$

Esto es, se trata de dos expresiones de la conjunción.

La negación de la inclusión entre un término y el opuesto al otro término, equivale a la conjunción del contrario al primer término con el otro término:

$$\{1 - [x - x(1 - y) + (1 - y)]\} = [(1 - x)y]$$

O sea, que tenemos dos representaciones de la discordancia inversa.

La negación de la inclusión entre el contrario al primer término y el otro término, equivale a la conjunción entre el primer término y el opuesto al otro:

$$\{1 - [(1 - x) - (1 - x)y + y]\} = [x(1 - y)]$$

Esto es, se trata de dos representaciones de la discordancia.

La negación de la inclusión entre el juicio conjugante y el juicio heterofático, equivale a la conjunción del juicio incompatible con el juicio incluyente:

$$\begin{aligned}\{1 - [(xy) - (xy)\ (1 - x + xy - y) + (1 - x + xy - y)]\} &= \\ = [(1 - xy)\ (x - xy + y)]\end{aligned}$$

O sea, que tenemos dos expresiones diferentes de la exclusión.

La negación de la inclusión entre el juicio discordante y el juicio discordante inverso, equivale a la conjunción del juicio implicante inverso con el juicio implicante:

$$\begin{aligned}\{1 - [(x - xy) - (x - xy)\ (y - xy) + (y - xy)]\} &= \\ = [(1 - x + xy)\ (1 - y + xy)]\end{aligned}$$

Esto es, se trata de dos representaciones de la reciprocidad.

29 *idem;* equivalencia (19), pág. 8; es la segunda ley de Morgan.

12. *Negación de la negación*

La negación de la negación se distingue acusadamente de la doble negación formal, porque su resultado no vuelve al mismo punto de partida y en igual nivel. Por lo contrario, representa la negación completa de los dos términos relacionados y de la negación que los separa y los enlaza, en la superación de su síntesis dialéctica. De aquí que la negación de la negación sólo lleve al punto de partida en tanto que lo incluye como elemento inferior, entre los varios elementos que integran la nueva relación establecida en un nivel más elevado. Ejecutando esta operación con las formas del juicio establecidas, se obtienen los resultados que siguen:

La negación de los términos del juicio conjugante (xy) produce el juicio heterofático $[(1 - x)\ (1 - y)]$, y la negación de esta negación lleva al juicio incluyente $[1 - (1 - x)\ (1 - y)]$.

Ejemplo: *Juicio conjugante.* Algunas ecuaciones trascendentes tienen solución.
Juicio heterofático. Algunas ecuaciones no son trascendentes ni tienen solución.
Juicio incluyente. Las ecuaciones son trascendentes o tienen solución, o bien, son trascendentes y tienen solución.

La negación de los términos del juicio discordante $(x - xy)$ produce el juicio discordante inverso $[(1 - x) - (1 - x)\ (1 - y)]$, y, a su vez, la negación de esta negación conduce al juicio implicante $[1 - (y - xy)]$.

Ejemplo: *Juicio discordante.* Algunos números racionales no son enteros.
Juicio discordante inverso. Algunos números enteros no son racionales.
Juicio implicante. Los números son racionales, o son racionales y enteros, o bien, no son racionales ni enteros.

La negación de los términos del juicio discordante inverso $(y - xy)$ es el juicio discordante $[(1 - y) - (1 - x)\ (1 - y)]$; y la negación de esta negación constituye el juicio implicante inverso $[1 - (x - xy)]$.

Ejemplo: *Juicio discordante inverso.* Algunos vertebrados no son reptiles.
Juicio discordante. Algunos reptiles no son vertebrados.
Juicio implicante inverso. Los animales son vertebrados o son vertebrados y reptiles, o no son vertebrados ni reptiles.[30]

[30] Como el juicio discordante y el juicio discordante inverso, lo mismo que el implicante y el implicante inverso, sólo se distinguen por la consideración de su término positivo como x o como y, los ejemplos de este caso y del anterior son intercambiables.

La negación de los términos del juicio heterofático $(1 - x + xy - y)$ es el juicio conjugante $[1 - (1 - x) + (1 - x)(1 - y) - (1 - y)]$; y la negación de esta negación es el juicio incompatible $(1 - xy)$.

Ejemplo: *Juicio heterofático.* Algunos juicios no son apriorísticos ni científicos.
Juicio conjugante. Algunos juicios apriorísticos son científicos.
Juicio incompatible. Si un juicio es apriorístico, entonces, no es juicio científico.

Otra manera de plantear lógicamente la negación de la negación, consiste en partir de un juicio que es considerado como tesis, obtener luego su antítesis correspondiente y, por último, establecer la síntesis resultante de la tesis, la antítesis y su contradicción. De este modo se pueden practicar las operaciones que se indican a continuación.

La tesis del juicio de conjunción (xy) tiene como antítesis al juicio heterofático $[(1 - x)(1 - y)]$, y la síntesis que los incluye a ambos es el juicio reciprocante $[(xy) - (xy)(1 - x + xy - y) + (1 - x + xy - y)]$.

Ejemplo: *Juicio conjugante.* Algunos vegetales con clorofila realizan la fotosíntesis.
Juicio heterofático. Algunos vegetales no tienen clorofila ni realizan la fotosíntesis.
Juicio reciprocante. Un vegetal realiza la fotosíntesis cuando, y sólo cuando, tiene clorofila.

La tesis del juicio discordante $(x - xy)$ tiene como antítesis al juicio discordante inverso $[(1 - x) - (1 - x)(1 - y)]$, y los dos se sintetizan por inclusión en el juicio excluyente $[(x - xy) - (x - xy)(y - xy) + (y - xy)]$.

Ejemplo: *Juicio discordante.* Algunos electrones atómicos exteriores al núcleo no son positivos.
Juicio discordante inverso. Algunos electrones atómicos positivos no son exteriores al núcleo.
Juicio excluyente. Todo electrón atómico es exterior al núcleo o es positivo, sin que sea ambas cosas a la vez.

La tesis del juicio incompatible $(1 - xy)$ tiene como antítesis al juicio incluyente $[1 - (1 - x)(1 - y)]$, y ambos juicios se conjugan en la síntesis del juicio excluyente $[(1 - xy)(x - xy + y)]$.

Ejemplo: *Juicio incompatible.* Ninguna función algebraica es trascendente.

Juicio incluyente. Toda función es algebraica o es trascendente.
Juicio excluyente. Una función es trascendente cuando, y sólo cuando, no es algebraica.

La tesis del juicio implicante $(1 - y + xy)$ tiene como antítesis al juicio implicante inverso $[1 - (1 - y) + (1 - x)(1 - y)]$, y los dos se conjugan en la síntesis del juicio reciprocante $[(1 - y + xy)(1 - x + xy)]$.

Ejemplo: *Juicio implicante.* Todo triángulo equilátero es equiángulo.
Juicio implicante inverso. Todo triángulo equiángulo es equilátero.
Juicio reciprocante. Todo triángulo equilátero es equiángulo, y todo triángulo equiángulo es equilátero.

Además, toda síntesis formada se constituye, a su vez, en una nueva tesis que tiene su antítesis respectiva y conduce, luego, a otra síntesis entre ellas y su oposición. Esta sucesión continua la podemos ilustrar con el ejemplo siguiente:

Tesis. La clase de los números enteros (x).
Antítesis. La clase de los números no-enteros o fraccionarios $(1 - x)$. La síntesis se obtiene incluyendo a tesis y antítesis en una clase común: $y = x - x(1 - x) + (1 - x) = 1$; o sea: $y = 1$. Luego, existe siempre la *síntesis* (y), constituída por la clase de los números positivos, tanto enteros como fraccionarios. A su vez, la clase y constituye una nueva tesis. Por lo tanto, el proceso sigue adelante:

Tesis. La clase de los números positivos (y).
Antítesis. La clase de los números no-positivos o negativos $(1 - y)$. Por inclusión: $z = y - y(1 - y) + (1 - y) = 1$; o sea: $z = 1$.
Síntesis. La clase de los números racionales (z), que contiene a las clases anteriores.

Todavía más, continúa el proceso:

Tesis. La clase de los números racionales (z).
Antítesis. La clase de los números no-racionales o irracionales $(1 - z)$.

Por inclusión: $s = z - z(1 - z) + (1 - z) = 1$; o sea: $s = 1$.

Síntesis. La clase de los números reales (s), que comprende a todas las clases anteriores.

Y así, sucesivamente, se prosigue la formación de síntesis, con base en las síntesis anteriores.

13. *Simetría*

Cuando un juicio implica siempre a su inverso, se encuentra en relación de simetría. Y, cuando un juicio excluye siempre a su inverso, entre ellos existe una relación de asimetría.[31] Si representamos a un juicio cualquiera por *xRy*, su inverso quedará representado por *yRx;* entonces, la implicación entre ellos $(1 - y + xy = 1)$ queda establecida así:

$$1 - xRy + xRy \cdot yRx = 1$$

de donde, reduciendo las dos unidades que figuran en ambos miembros y pasando el segundo término del primer miembro al segundo miembro, tenemos:

$$xRy \cdot yRx = xRy$$

De tal manera que la simetría, o conmutación, entre dos juicios mutuamente inversos, existe cuando la conjunción de ambos juicios equivale a uno de los juicios.

Por su parte, la incompatibilidad $(1 - xy = 1)$ entre dos juicios inversos, se expresa de este modo: $1 - xRy \cdot yRx = 1$; de donde, reduciendo las dos unidades y cambiando el signo a los dos miembros de la ecuación, resulta: $xRy \cdot yRx = 0$. De este modo, la asimetría entre dos juicios recíprocamente inversos se cumple cuando la conjunción entre ambos juicios es nula, o sea, que es imposible.

Ahora, aplicando estos discriminantes $-(xRy \cdot yRx = xRy)$ para la simetría, $(xRy \cdot yRx = 0)$ para la asimetría– a las varias formas del juicio, obtenemos los resultados que siguen:

El juicio conjugante (xy) tiene como inverso al propio juicio conjugante (yx).[32] Su conjunción produce al mismo juicio: $(xy)\ (yx) = (xy)$. Por lo tanto, se cumple entre ellos la simetría; o sea, que la conjunción es conmutativa. Y, como la conjunción entre el juicio y su inverso no es nula, el juicio conjugante no es asimétrico.

El juicio discordante $(x - xy)$ tiene como inverso al juicio discordante inverso $(y - xy)$. Su conjugación no representa al juicio discordante:

$$(x - xy)\ (y - xy) = 0$$

En consecuencia, no se cumple para ellos la simetría. En cambio, como la conjugación es nula, tenemos que su relación es asimétrica.

[31] Bertrand Russell, *Los principios de la matemática*, Espasa-Calpe, Buenos Aires-México, 1948; págs. 278-9.

[32] Hilbert, *op. cit.;* equivalencia (2), pág. 6.

En forma análoga, se llega a la conclusión de que la relación entre el juicio discordante inverso y el juicio discordante, no es simétrica y es asimétrica.

El juicio heterofático $(1 - x + xy - y)$ tiene como inverso al mismo juicio heterofático $(1 - y + yx - x)$. La conjugación entre ambos produce al propio juicio heterofático: $(1 - x + xy - y)(1 - y + yx - x) = (1 - x + xy - y)$. Por consiguiente, la relación es simétrica; es decir, que la heterófasis es conmutativa. Al mismo tiempo, como esta conjugación no es nula, la relación no es asimétrica.

El juicio incluyente $(x - xy + y)$ es el inverso de sí mismo $(y - yx + x)$.[33] La conjunción produce al propio juicio incluyente: $(x - xy + y)(y - yx + x) = (x - xy + y)$. Por lo tanto, la relación es simétrica; esto es, que la inclusión es conmutativa. A la vez, como la conjunción no es nula, la relación no es asimétrica.

El juicio incompatible $(1 - xy)$ es el inverso de sí mismo $(1 - yx)$. Su conjunción representa también al juicio incompatible: $(1 - xy)(1 - yx) = (1 - xy)$. De este modo, su relación es de simetría; o sea, que la incompatibilidad es conmutativa. Al propio tiempo, debido a que la conjunción no se anula, la relación no es asimétrica.

El juicio implicante $(1 - y + xy)$ tiene como inverso al juicio implicante inverso $(1 - x + xy)$. La conjugación entre ambos no produce al juicio implicante: $(1 - y + xy)(1 - x + xy) = (1 - x + 2xy - y)$. Por lo tanto, la relación no es simétrica. Pero, como la conjugación no es nula, entonces, la relación tampoco es asimétrica.

De modo semejante se obtiene la conclusión de que la relación entre el juicio implicante inverso y el juicio implicante, no es simétrica ni asimétrica.

El juicio excluyente $(x - 2xy + y)$ se tiene a sí mismo por inverso $(y - 2yx + x)$. Su conjugación produce otra vez el juicio excluyente: $(x - 2xy + y)(y - 2yx + x) = (x - 2xy + y)$. En consecuencia, la relación es simétrica; esto es, que la exclusión es conmutativa. Y, como la conjunción no es nula, la relación no es asimétrica.

El juicio reciprocante $(1 - x + 2xy - y)$ es el inverso de sí mismo $(1 - y + 2yx - x)$.[34] Su conjugación conduce al propio juicio reciprocante: $(1 - x + 2xy - y)(1 - y + 2yx - x) = (1 - x + 2xy - y)$. Así, la relación es de simetría; es decir, que la reciprocidad es conmutativa. A la vez, debido a que la conjugación no es nula, la relación no es asimétrica.

14. *Transitividad*

Cuando la conjugación entre un juicio establecido respecto a dos términos, x e y, y el juicio inverso correspondiente al segundo de estos términos y

[33] *idem;* equivalencia (4), pág. 6.
[34] *idem;* equivalencia (25), pág. 9.

a un tercero, *z*, implica siempre al juicio formulado en cuanto al primero y al tercero de los términos, *x* y *z*, y en la misma relación que el primer juicio, entonces, dichos juicios se encuentran en conexión de transitividad. Por otra parte, cuando la conjugación de los dos primeros juicios excluye siempre al tercer juicio, entonces, entre ellos existe una relación de intransitividad.[35]

Representando al primer juicio por xRy, al segundo por yRz y al tercero por xRz, tenemos que la implicación $(1 - y + xy = 1)$ entre la conjunción de los dos primeros y el tercero, queda establecida de la siguiente manera: $1 - xRy \cdot yRz + xRy \cdot yRz \cdot xRz = 1$; de donde, suprimiendo las unidades que figuran en ambos miembros y trasladando al segundo miembro el segundo término del primer miembro, tenemos:

$$xRy \cdot yRz \cdot xRz = xRy \cdot yRz$$

De este modo, existe la transitividad cuando la conjugación entre los tres juicios equivale a la conjunción entre los dos primeros.

A su vez, la incompatibilidad $(1 - xy = 1)$ entre los dos primeros juicios y el tercero, se expresa de este modo:

$$1 - xRy \cdot yRz \cdot xRz = 1$$

de donde, reduciendo las unidades y cambiando el signo de los dos miembros, la ecuación resulta así:

$$xRy \cdot yRz \cdot xRz = 0$$

Por lo tanto, la intransitividad entre los tres juicios se cumple cuando su conjugación es nula o imposible.

Pues bien, al aplicar estos discriminantes —$(xRy \cdot yRz \cdot xRz = xRy \cdot yRz)$ para la transitividad, $(xRy \cdot yRz \cdot xRz = 0)$, para la intransitividad— a los diversos tipos de juicio, se consiguen los siguientes resultados.

En el caso de tres juicios conjugantes, (xy), (yz), (xz), la relación es:

$$(xy)\ (yz)\ (xz) = (xy)\ (yz) = (xyz)$$

Por lo tanto, su relación es transitiva. Y, como el resultado no es nulo, la relación no es intransitiva.

En el caso de tres juicios discordantes, $(x - xy)$, $(y - yz)$, $(x - xz)$, tenemos:

$$(x - xy)\ (y - yz)\ (x - xz) = (x - xy)\ (y - yz) = 0$$

[35] Russell, *op. cit.;* págs. 278-9.

Por consiguiente, su relación es transitiva. Y, al mismo tiempo, como la conjunción es nula, la relación también es intransitiva.

De manera semejante se obtiene la conclusión de que la relación entre los tres juicios discordantes inversos es transitiva e intransitiva a la vez.

Los tres juicios heterofáticos, $(1 - x + xy - y)$, $(1 - y + yz - z)$, $(1 - z + zx - x)$, producen:

$$\begin{aligned}(1 - x + xy - y)\,(1 - y + yz - z)\,(1 - z + zx - x) &= \\ = (1 - x + xy - y)\,(1 - y + yz - z) &= \\ = (1 - x + xy - y + yz - z + xz - xyz)&\end{aligned}$$

Así, la relación es transitiva. Y, por no ser nula, dicha relación no es intransitiva.

Los juicios incluyentes, $(x - xy + y)$, $(y - yz + z)$, $(z - zx + x)$, se conectan así:

$$(x - xy + y)\,(y - yz + z)\,(z - zx + x) = (xy + yz + zx - 2xyz)$$

En consecuencia, la relación no cumple con el primer discriminante y, entonces, no es transitiva. Y, dado que tampoco se cumple el segundo discriminante, la relación no es intransitiva.

Los juicios incompatibles, $(1 - xy)$, $(1 - yz)$, $(1 - zx)$, se relacionan de este modo:

$$(1 - xy)\,(1 - yz)\,(1 - zx) = (1 - xy - yz - zx + 2xyz).$$

Por consiguiente, su relación no es transitiva, porque no se cumple la condición distintiva. Y, a la vez, debido a que el resultado no es nulo, tampoco se cumple la otra condición indicativa, de tal manera que la relación no es intransitiva.

Entre los juicios implicantes, $(1 - y + xy)$, $(1 - z + yz)$, $(1 - z + zx)$, la conexión es la siguiente:

$$\begin{aligned}(1 - y + xy)\,(1 - z + yz)\,(1 - z + zx) = (1 - y + xy)\,(1 - z + yz) &= \\ = (1 - y + xy - z + yz).&\end{aligned}$$

Por lo tanto, la relación es transitiva y no es intransitiva.

En forma análoga, se advierte cómo la relación entre los juicios implicantes inversos resulta ser transitiva y no intransitiva.

Para el caso de los juicios excluyentes, $(x - 2xy + y)$, $(y - 2yz + z)$, $(z - 2zx + x)$, tenemos:

$$(x - 2xy + y)\,(y - 2yz + z) = (xy + yz + zx - 2xy - 2yz + y)$$

mientras que:

$$(x - 2xy + y)\ (y - 2yz + z)\ (z - 2zx + x) = 0.$$

Entonces, la relación no es transitiva y es intransitiva.

Para los tres juicios reciprocantes, $(1 - x + 2xy - y)$, $(1 - y + 2yz - z)$, $(1 - z + 2zx - x)$, tenemos:

$$(1 - x + 2xy - y)\ (1 - y + 2yz - z)\ (1 - z + 2zx - x) =$$
$$= (1 - x + 2xy - y)\ (1 - y + 2yz - z) = (1 - x + xy - y + yz - z + zx)$$

Por lo tanto, la relación es transitiva y no es intransitiva.

15. *Ley asociativa*

La ley asociativa se cumple cuando el modo en que se asocian tres o más términos, en una misma relación, no altera a dicha relación. Si examinamos las diversas formas del juicio con arreglo a este criterio, encontramos que únicamente en cuatro de ellas se cumple la ley asociativa, tal como se muestra en seguida.

Conjunción: $[x(yz)] = [(xy)z]$ [36]

Ejemplo: (Algunos electrones) son (nucleares positivos) = (Algunos electrones nucleares) son (positivos).

Inclusión:

$$[x - x(y - yz + z) + (y - yz + z)] =$$
$$= [(x - xy + y) - z(x - xy + y) + z]$$ [37]

Ejemplo: (Todo número es trascendente) o (es real, o es imaginario, o es real e imaginario) o (es trascendente y real, o es trascendente e imaginario, o es trascendente real e imaginario) =
= (Todo número es trascendente, o es real, o es trascendente y real) o (es imaginario) o (es trascendente e imaginario, o es real e imaginario, o es trascendente real e imaginario).

Exclusión:

$$[x - 2x(y - 2yz + z) + (y - 2yz + z)] =$$
$$= [(x - 2xy + y) - 2z(x - 2xy + y) + z]$$

[36] Hilbert, *op. cit.;* equivalencia (3), pág. 6.
[37] *idem;* equivalencia (5), pág. 6.

Ejemplo: (Las partículas elementales son neutras) o (tienen carga positiva o tienen carga negativa, pero nunca tienen carga positiva y negativa) pero (nunca son neutras con carga positiva, ni neutras con carga negativa) =
= (Las partículas elementales son neutras o tienen carga positiva, pero nunca son neutras y tienen carga positiva) o (tienen carga negativa) pero (nunca son neutras con carga negativa, ni tienen carga positiva y negativa a la vez).

Reciprocidad:

$$[1 - x + 2x(1 - y + 2yz - z) - (1 - y + 2yz - z)] =$$
$$= [1 - (1 - x + 2xy - y) + 2z(1 - x + 2xy - y) - z]$$

Ejemplo: (Todo número es natural) cuando y sólo cuando (es entero y positivo, cuando y sólo cuando, es producto de números primos) =
= (Todo número es natural, cuando y sólo cuando, es entero y positivo) cuando y sólo cuando (es producto de números primos).

16. *Ley distributiva de la conjunción*

La ley distributiva de la conjunción se cumple cuando la conjugación entre un término y un juicio es equivalente al juicio del mismo tipo formado con las conjugaciones de dicho término con cada uno de los términos del primer juicio; o sea, cuando la conjunción se distribuye entre los dos términos del juicio al cual se aplica. Examinando lo que ocurre para los distintos tipos de juicio, encontramos que la conjunción es distributiva respecto a la conjunción, la discordancia, la discordancia inversa, la inclusión y la exclusión; tal como se presenta a continuación.

A la conjunción: $[x(yz)] = [(xy)\ (xz)]$

Ejemplo: (Algunos números reales) son (enteros y son negativos) =
= (Algunos números reales enteros son números reales negativos).

A la discordancia: $x[y(1 - z)] = [xy]\ [x(1 - z)]$
A la discordancia inversa: $x[z(1 - y)] = [xz]\ [x(1 - y)]$

Ejemplo:[38] (Algunas ecuaciones lineales) son (ecuaciones solubles que no son algebraicas) =
= (Algunas ecuaciones lineales solubles son ecuaciones lineales que no son algebraicas).

A la inclusión: $x[y - yz + z] = [xy - (xy)(xz) + xz]$ [39]

Ejemplo: (Los números racionales) son (positivos, o negativos, o positivos y negativos simultáneamente) =
= (Hay números racionales positivos, números racionales negativos, y números racionales positivos y negativos simultáneamente).

A la exclusión: $x[y - 2yz + z] = [xy - 2(xy)(xz) + xz]$

Ejemplo: (Las curvas cónicas) son (cerradas o abiertas, pero no ambas cosas) =
= (Hay curvas cónicas cerradas o curvas cónicas abiertas, pero no hay curvas cónicas cerradas y abiertas).

17. *Ley distributiva de la inclusión*

La ley distributiva de la inclusión tiene cumplimiento cuando la inclusión entre un término y un juicio equivale al juicio de la misma forma establecido con las dos inclusiones entre dicho término con cada uno de los términos del juicio primitivo; es decir, cuando la inclusión se distribuye homogéneamente en los dos términos del juicio que afecta. Si examinamos los resultados de su aplicación en cada caso, encontramos que la inclusión es distributiva respecto a la conjunción, la inclusión, la implicación, la implicación inversa y la reciprocidad; tal como lo presentamos en seguida.

A la conjunción:

$$[x - x(yz) + (yz)] = [x - xy + y]\,[x - xz + z]$$ [40]

Ejemplo: Algunos universitarios son (alumnos) o (profesores y empleados) o (alumnos, profesores y empleados) =
= Algunos universitarios (alumnos, o profesores, o alumnos y profesores) son (alumnos, o empleados, o alumnos y empleados).

[38] Recuérdese la simple diferencia de consideración entre el juicio discordante y el juicio discordante inverso; por lo cual el ejemplo ilustra ambos casos.
[39] Hilbert, *op. cit.;* equivalencia (7), pág. 7.
[40] *idem;* equivalencia (6), pág. 6.

A la inclusión:

$$x - x(y - yz + z) + (y - yz + z) =$$
$$= (x - xy + y) - (x - xy + y)(x - xz + z) + (x - xz + z)$$

Ejemplo: Los procesos físicos son (atómicos) o (cumplen con las leyes clásicas, o con las leyes cuánticas, o con ambos conjuntos de leyes a la vez) o son (atómicos en que se cumplen las leyes clásicas, o atómicos en que se cumplen las leyes cuánticas, o atómicos en que se cumplen ambos conjuntos de leyes a la vez) =
= Los procesos físicos son (atómicos, o cumplen con las leyes clásicas, o atómicos que cumplen con las leyes clásicas) o (son atómicos, o cumplen con las leyes cuánticas, o atómicos que cumplen con las leyes cuánticas) o (son atómicos, o cumplen con las leyes clásicas y cuánticas a la vez, o atómicos que cumplen simultáneamente con las leyes clásicas y las leyes cuánticas).

A la implicación:

$$x - x(1 - z + yz) + (1 - z + yz) =$$
$$= 1 - (x - xz + z)(1 - x + xy - y)$$

A la implicación inversa:

$$x - x(1 - y + yz) + (1 - y + yz) =$$
$$= 1 - (x - xy + y)(1 - x + xz - z)$$

Ejemplo:[41] En todo proceso físico (se cumple la causalidad) o (la relación de incertidumbre implica el indeterminismo) o (se cumple la causalidad y la relación de incertidumbre implica el indeterminismo) =
= En todo proceso físico (se cumple la causalidad, o hay incertidumbre, o se cumple la causalidad y hay incertidumbre) lo cual implica que (se cumple la causalidad o hay indeterminismo, o se cumple la causalidad y hay indeterminismo).

[41] Teniendo en cuenta la distinción entre el juicio implicante y el juicio implicante inverso, exclusivamente por la consideración de sus términos, el ejemplo sirve para los dos casos.

A la reciprocidad:

$$x - x(1 - y + 2yz - z) + (1 - y + 2yz - z) =$$
$$= 1 - (x - xy + y) + 2(x - xy + y)\,(x - xz + z) - (x - xz + z)$$

Ejemplo: Un número es (número entero) o (es número positivo, cuando y sólo cuando, el doble del número es número positivo) o (es número entero y positivo, cuando y sólo cuando, el doble del número es número entero y positivo) = = Un número es (número entero, o número positivo, o número entero y positivo) cuando y sólo cuando (el doble del número es número entero, o número positivo, o número entero y positivo).

ELI DE GORTARI