Diánoia, vol. 4, no. 4, 1958

LA FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS EN DESCARTES

Desde hace siglo y medio, con Jorge Cantor, el estudio de los problemas filosóficos que la Matemática ofrece va adquiriendo particular relieve; pero todos los filósofos, desde la más remota antigüedad, se han preocupado más o menos de esos mismos problemas, como lo prueban las monografías históricas aparecidas en los últimos años.[1] Este ensayo pretende agrupar las soluciones dadas a dichos problemas por el padre de la filosofía moderna.

Tiene particular interés este estudio, por haber sido René Descartes (1596-1650), además de filósofo, un genio de las matemáticas, "la ciencia que él tanto estimó y a la que se dedicó con tanto ahinco",[2] la que más usó[3] y en la que descubrió tantas invenciones geniales.[4]

Descartes estuvo imbuido en los principios de la Geometría,[5] formando una excepción de la regla que él mismo propone en la dedicatoria de sus *Principios de filosofía,* según la cual "quienes cultivan la Geometría no pueden comprender las verdades concernientes a la Filosofía Primera".[6]

No habiendo encontrado en las obras cartesianas ningún esbozo de Filosofía de las Matemáticas, he agrupado sus doctrinas bajo los siguientes epígrafes: *1.* Primeras Nociones. *2.* Nociones Aritméticas. *3.* Nociones Geométricas. *4.* Principios de las Matemáticas. *5.* La certeza matemática. *6.* El Infinito. *7.* El Método. *8.* Relación con el mundo real. *9.* Facultades Matemáticas. *10.* Teoría de las Matemáticas.

1. *Primeras nociones*

Todos fácilmente admiten, dice Descartes, las primeras nociones matemáticas, ya que se adquieren con el uso de los sentidos,[7] pues la magnitud, o

[1] J. Stenzel, *Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles,* Teubner, Leipzig, 1924; Anders Wedberg, *Plato's Philosophy of Mathematics,* Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1955; Hipocrates George Apostle, *Aristotle's Philosophy of Mathematics,* Chicago University Press, 1952; J. Álvarez Lazo, *La Filosofía de las Matemáticas en Sto. Tomás,* Jus, México, 1952.

[2] Descartes, *Ep. ad P***,* 1643, ed. Adam-Tannery, IV, pág. 66, 5-7.

[3] *Ep. ad P. Dinet,* ed. Adam-Tannery, VII, pág. 578.

[4] Ch. Adam, *Vie et oeuvres de Descartes,* ed. Adam-Tannery, XII, págs. 208-225; L. Brunschvicg, *Las etapas de la Filosofía Matemática,* Lautaro, Buenos Aires, 1945; págs. 132-157.

[5] *Med. de Prim. Phil.,* Vª, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 69, 28.

[6] *Princ. Phil., Ep. ded.,* ed. Adam-Tannery, VIII, pág. 4, 5-6.

[7] *Med. de Prim. Phil., Resp. ad sec. obj.,* ed. Adam-Tannery, VIII, pág. 156, 27-30.

sea la extensión en largo, ancho y profundo —y el número son de las poquísimas cosas que clara y distintamente se perciben en las realidades corporales.[8]

El matemático tiene en sí las ideas de los números y de las figuras tan absolutamente, que no puede dudar de su verdad, mientras atiende a las mismas,[9] de modo que la Aritmética y la Geometría —que tratan únicamente de estas sencillísimas y generalísimas cosas— son ciertas e indubitables.[10]

Lo mismo debe decirse de los primeros juicios matemáticos que intuimos tan perspicuamente que debemos afirmar su verdad, como dos y tres son cinco, el cuadrado tiene sólo cuatro lados, verdades tan evidentes que ni siquiera cabe la sospecha de falsedad.[11] Tan claras son estas verdades, en las que únicamente se examinan el orden y la medida, que basta haber frecuentado las primeras clases, para saber distinguir lo que pertenece a las Matemáticas o a las otras disciplinas científicas.[12]

2. *Nociones aritméticas*

Vengamos, en concreto, a los números. "Cuando vemos dos piedras, y, sin pensar en su naturaleza, observamos solamente que hay dos, formamos en nosotros la idea de un cierto número, al que llamamos dos. Si, viendo después dos aves o dos árboles, observamos, sin pensar tampoco en su naturaleza, que hay dos cosas, repetimos la misma idea anterior, haciéndola, pues, universal, así como al número, aplicándole un nombre universal, el de número dos."[13] Pero, "aunque nuestra inteligencia no se preocupe principalmente sino en la pluralidad de tal sujeto, debemos, sin embargo, tener cuidado de no sacar alguna conclusión que haga suponer que la cosa contada haya sido excluida de nuestra concepción, como hacen aquellos que atribuyen a los números propiedades maravillosas, puras locuras, a las cuales ellos mismos no darían tanta fe, si no concibiesen el número como distinto de la cosa numerada".[14]

"El número no se distingue de la cosa numerada sino en nuestro pensamiento."[15]

"El número, considerado en abstracto, o en general, sin referencia a ninguna cosa creada, no es, fuera de nuestro pensamiento, algo más que todas esas ideas generales comprendidas bajo el nombre de universales."[16]

8 *Ibid.*, IIIª, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 63.
9 *Princ. Phil.*, I, 13, ed. Adam-Tannery, VIII, pág. 9.
10 *Med. de Prim. Phil.*, Iª, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 20.
11 *Ibid.*, IIIª, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 36.
12 *Reg. ad. dir. Ing.*, IVª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 377.
13 *Princ. Phil.*, I, 59, ed. Adam-Tannery, VIII, pág. 27, 23-31.
14 *Reg. ad dir. Ing.*, XIVª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 445, 17-28.
15 *Princ. Phil.*, II, 8, ed. Adam-Tannery, VIII, pág. 44, 20-21.
16 *Ibid.*, I, 58, ed. Adam-Tannery, VIII, pág. 27, 15-18.

"Los números son abstraídos de toda materia por la inteligencia, pero entre ellos se distinguen realmente por la imaginación." [17]

Como ejemplo de primeras verdades aritméticas repite muchas veces Descartes que dos y tres son cinco, "cosa que aprenden ya los niños, al mismo tiempo que cuentan dos y tres" [18] y que todos, "aun los escépticos",[19] admiten siempre, "persuadiéndose de que no puede ser de otra manera".[20]

Los números, pues, constan de unidades. "La unidad es aquella naturaleza de la cual deben participar igualmente todas las cosas que se comparan con ella." [21] Esta unidad puede ser arbitraria.[22]

Sin embargo, cuenta Descartes una anécdota curiosa. "Un soñoliento, oyendo que el reloj daba las cuatro, contó: una, una, una, una, y extrañado del absurdo que en su mente concebía, exclamó: 'Está delirando el reloj: ha tocado cuatro veces la una'." [23]

Entre las cosas fáciles cataloga nuestro autor "todas las combinaciones de los números y todas las operaciones que pertenecen a la Aritmética",[24] "que son cuatro: la adición, la substracción, la multiplicación y la división".[25]

"En un día se puede aprender a nombrar todos los números hasta el infinito y a escribirlos en una lengua desconocida, siendo una infinidad de palabras diferentes." [26]

Distingue Descartes un doble uso de los números: uno explica el orden (Números ordinales) y otro la medida (Números cardinales).[27]

Puedo, naturalmente, generalizar el concepto de número, abstraer del número concreto y simbolizar un número cualquiera con letras, como al tratar el problema general de encontrar la base de un triángulo, conociendo el valor de sus lados.[28]

3. *Nociones geométricas*

Descartes señala como objeto de la Geometría "un cuerpo continuo o un espacio infinitamente extenso en longitud, latitud y altura o profundidad, divisible en varias partes que pueden tener varias figuras y magnitudes y ser movidas o trasladadas en todos los sentidos".[29] El mismo autor, en diversos

[17] *Reg. ad dir. Ing.*, XIVª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 446, 17-20.
[18] *Med. de Prim. Phil., Resp. ad sext. obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 445, 15-17.
[19] *Ibid., Resp. ad sept. obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 549, 3.
[20] *Ibid., Resp. ad sept. obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 524.
[21] *Reg. ad dir. Ing.*, XIVª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 449, 26-28.
[22] *Ibid.*, XIVª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 450.
[23] *Med. de Prim. Phil., Resp. ad sept. obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 457, 8-12.
[24] *Reg. ad dir. Ing.*, Xª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 404, 13-14.
[25] *Ibid.*, XVIIIª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 461, 12-13.
[26] *Ep. ad P. Mersenne*, 20 de nov. del 1620, ed. Adam-Tannery, I, pág. 80, 27-30.
[27] *Reg. ad dir. Ing.*, Xª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 457.
[28] *Ibid.*, XVIIª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 458.
[29] *Discours de la Méthode*, IV, ed. Adam Tannery, VI, pág. 36, 5-10.

pasajes, precisa más el sentido de este objeto de la Geometría. "El espacio o el lugar interior y el cuerpo que está comprendido en este espacio no son diferentes sino en nuestro entendimiento. Porque, efectivamente, la misma extensión en largo, ancho y profundo que constituye el espacio constituye el cuerpo y la diferencia que existe entre ellos consiste sólo en que atribuimos al cuerpo una extensión particular —que imaginamos cambiar de lugar con el cuerpo todas las veces que es transportado— y atribuimos al espacio una extensión tan general y tan vaga que, después de haber quitado de un cierto espacio el cuerpo que lo ocupaba, no pensamos haber transportado también la extensión de este espacio, porque nos parece que la misma extensión se queda siempre, siendo de la misma magnitud y de la misma figura y que no ha cambiado en nada la situación con respecto a los cuerpos de fuera, por los cuales nosotros determinamos la extensión." [30]

Si el extenso tiene tres dimensiones se llama cuerpo.

Si tiene sólo dos se llama superficie.

Si tiene una sola dimensión se llama línea.[31]

Cuerpo, superficie y línea, sin embargo, no son, como "algunos conciben erróneamente en esta ciencia, tres especies de cantidad".[32]

Pocas veces usa Descartes la palabra "cantidad". Se abstiene a propósito de ella, "porque hay filósofos tan sutiles que establecen también una distinción entre la cantidad y la extensión".[33]

"Notemos de paso que las tres dimensiones de los cuerpos, la largura, la anchura y la profundidad no se distinguen entre ellas sino por el nombre. Nada impide de hecho que en un cuerpo dado se tome por largura, anchura o profundidad una u otra de estas tres dimensiones indiferentemente." [34]

Descartes toma la palabra dimensión en un sentido más general. "Por dimensión —dice— no entendemos otra cosa que el modo y la razón según la cual se puede medir alguna cosa, de modo que no solamente lo largo, lo ancho y lo profundo sean las dimensiones del cuerpo, sino además el peso es la dimensión según la cual una cosa es pesada; la velocidad es la dimensión del movimiento, y así una infinidad de otras maneras parecidas." [35]

En este sentido, naturalmente, pueden ser muchas las dimensiones y coincidir con todos los datos necesarios para resolver un problema.[36]

[30] *Princ. Phil.*, II, 10, ed. Adam-Tannery, VIII, pág. 45, 17-30.

[31] *Med. de Prim. Phil.*, *Resp. ad quart. obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 228. Cf. *ibid.*, *Resp. ad sext. obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 433.

[32] *Reg. ad dir. Ing.*, XIVª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 448, 24-25.

[33] *Ibid.*, XIVª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 447, 7-8.

[34] *Ibid.*, XIVª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 449, 4-9.

[35] *Ibid.*, XIVª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 447, 23-29.

[36] *Ibid.*, XIVª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 449; cf. XVIª, ed Adam-Tannery, X, pág. 454.

La divisibilidad es algo esencial al cuerpo, lo cual supone imperfección,[37] de modo que siempre es divisible, divisible al infinito.[38]

La idea de figura en general es anterior a cualquier figura en particular, "porque, por ejemplo, fácilmente entendemos la figura sin pensar en el círculo (aunque este conocimiento no es distinto, si no se refiere a alguna figura especial); pero no entendemos ninguna diferencia específica del círculo, sin pensar al mismo tiempo en la figura".[39]

No es necesario que captemos la idea de cada figura de una cosa singular, para que las propiedades que de ella deduzcamos sean verdaderas.[40] "Y, aunque las figuras geométricas sean totalmente corpóreas, no por eso aquellas ideas por las cuales son entendidas cuando no caen bajo la imaginación, se han de considerar corpóreas." [41]

Las figuras pueden ser muchísimas, sin límite.[42]

"Cuando consideramos una figura de tres lados, formamos una idea, a la que llamamos idea de un triángulo, y nos servimos luego de ella para representarnos, en general, todas las figuras que tienen solamente tres lados. Mas cuando observamos que de las figuras de tres lados, las unas tienen un ángulo recto, y las otras no, nos formamos una idea universal del triángulo rectángulo, que referida a la precedente, que es más general, y la denominamos especie: el ángulo recto es la diferencia universal por la que los triángulos rectángulos difieren de todos los demás." [43]

Ésta y otras figuras "que yo puedo pensar a mi arbitrio tienen, sin embargo, sus naturalezas verdaderas e inmutables, como, por ejemplo, cuando imagino un triángulo, aunque tal vez esta figura en ninguna parte exista fuera de mi pensamiento, ni haya nunca existido, está, no obstante, determinada cierta naturaleza suya, o esencia, o forma inmutable y eterna que no ha sido hecha por mí, ni depende de mi entendimiento, como es claro por las varias propiedades que se pueden demostrar de este triángulo, a saber, que sus tres ángulos son iguales a dos rectos, que el lado mayor subtiende al ángulo mayor, y otras parecidas, que, quiera o no quiera, ahora reconozco claramente, aunque antes nada pensase en ellas, cuando imaginaba el triángulo y, por consiguiente, no fueron hechas por mí.

Ni viene al caso decir que tal vez esta idea de triángulo me vino de las cosas exteriores por medio de los órganos de los sentidos, porque alguna vez vi algunos cuerpos de forma triangular; pues puedo imaginar otras innume-

[37] *Med. de Prim. Phil., Resp. ad sec. obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 138; cf. *ibid., Resp. ad sec. obj., Post.* IV, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 163.
[38] *Ep. ad M. Morus*, 5 de febrero del 1649, ed. Adam-Tannery, V, pág. 273.
[39] *Med. de Prim. Phil., Resp. ad quart. obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 223, 13-18.
[40] *Ibid., Resp. ad quintas obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 380.
[41] *Ibid., Resp. ad quintas obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 385, 9-12.
[42] *Reg. ad dir. Ing.*, XIVª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 450.
[43] *Princ. Phil.*, I, 59, ed. Adam-Tannery, VIII, págs. 27, 31-28, 11.

rables figuras de las cuales ni sospecha puede haber que me vinieron alguna vez por los sentidos y, sin embargo, lo mismo que del triángulo, demostrar de ellas varias propiedades, que ciertamente son todas verdaderas, al conocerlas yo claramente y que, por tanto, son algo, no pura nada".[44]

Este ejemplo de las propiedades del triángulo se encuentra muchas veces en los escritos cartesianos.[45] Claro que hay una enorme diferencia entre el que apenas entiende por triángulo una figura de tres lados y el geómetra que puede demostrar muchas propiedades del mismo,[46] sin que esto quiera decir que la idea del triángulo se aumenta.[47] Puedo ciertamente prescindir de estas propiedades, pero de ninguna manera negarlas.[48] Puedo considerar separadamente el triángulo o el cuadrado y considerarlos también en relación mutua, por ejemplo, el triángulo inscrito en el cuadrado, lo cual forma como otra naturaleza de la cual se pueden deducir propiedades como decir que el cuadrado no es menor del duplo del triángulo inscrito en él, y otras parecidas.[49] Puedo, además, ir añadiendo nuevas líneas a las figuras dadas.[50]

Suele extenderse el concepto de una línea curva muy grande al concepto de línea recta, o el concepto de un polígono rectilíneo de un número indefinido de lados al concepto de círculo,[51] como ya lo hizo Arquímedes.[52]

La Geometría, en conclusión, es tan clara que no se suele disputar de cuestiones geométricas.[53]

4. *Principios de las Matemáticas*

Los principios de las Matemáticas "son evidentes en sí mismos".[54] Los principios de la Aritmética son "todas las combinaciones de números",[55] y los de la Geometría son todos aquellos que se deducen de las figuras, de las magnitudes, de los movimientos y de las reglas según las cuales se diversifican unos de otros.[56]

[44] *Med. de Prim. Phil.*, Vª, ed. Adam-Tannery, VII, págs. 64, 11-65, 4; cf. *ibid.*, *Resp. ad quintas obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 383.

[45] *Med. de Prim. Phil.*, Vª, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 66; pág. 67; pág. 69; pág. 70; *Resp. ad pr. obj.*, pág. 111; *Resp. ad sec. obj.*, pág. 150; pág. 151; *Post* IV, página 163; *Resp. ad quart. obj.*, pág. 224; pág. 225; pág. 243; *Resp. ad quintas obj.*, pág. 383.

[46] *Med. de Prim. Phil.*, *Resp. ad quintas obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 368; pág. 374.

[47] *Ibid.*, *Resp. ad quintas obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 371.

[48] *Ibid.*, *Resp. ad pr. obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 117.

[49] *Ibid.*, *Resp. ad pr. obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 118.

[50] *Ibid.*, *Resp. ad quintas obj.*, ed. Adam-Tannery, VIII, pág. 350.

[51] *Ibid. Resp. ad quart. obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 239.

[52] *Ibid.*, *Resp. ad quart. obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 241; pág. 245.

[53] *Ep. ad P. Dinet*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 581.

[54] *Princ. Phil.*, I, 5, ed. Adam-Tannery, VIII, pág. 6, 11.

[55] *Reg. ad dir. Ing.*, Xa, ed. Adam-Tannery, X, pág. 404, 19.

[56] *Princ. Phil.*, IV, 203, ed. Adam-Tannery, VIII, pág. 325, 28-30.

Como principio remoto señala Descartes la existencia de Dios, de modo que, "aunque no niegue que un ateo pueda conocer claramente que los tres ángulos de un triángulo son iguales a dos rectos", asegura que tal conocimiento no es verdadera ciencia, "porque ningún conocimiento que pueda ser dudoso se debe llamar ciencia; y el ateo no puede estar cierto de no engañarse en aquellas cosas que le parecen evidentísimas; pues, aunque tal vez no le ocurra esta duda, se le puede sin embargo ocurrir, si reflexiona, o si otro se la propone; y nunca podrá estar seguro, sin conocer antes a Dios".[57]

Los principios de las Matemáticas, por fundarse en la cantidad real, tienen que ser admitidos también en la Física, muchas de cuyas demostraciones tienen carácter matemático,[58] aunque frecuentemente los físicos tengan otra idea de la naturaleza de esta cantidad.[59]

Estos principios son siempre fundamentales en las demostraciones cartesianas,[60] por lo cual aconseja él mismo que es necesario aplicarse y ejercitarse largo tiempo en aprender este método, si verdaderamente se desea tener una ciencia completa.[61]

5. *La certeza matemática*

La Aritmética y la Geometría son "las más ciertas de todas las ciencias",[62] porque sus razones "son infalibles"[63] y sus verdades "claras y evidentes".[64]

"Me acuerdo —asegura Descartes— que siempre, aun antes de este tiempo, cuando me atraían sobremanera los objetos de los sentidos, tuve siempre por certísimas las verdades sobre las figuras o los números y otras que conocía evidentemente que pertenecían a la Aritmética o a la Geometría, o en general, a la Matemática pura y abstracta."[65]

"Con este mismo grado de certidumbre debería tener la existencia de Dios", dice en seguida.[66] "Esa existencia de Dios es la base de la certeza matemática, ya que todas las cosas dependen de Él y Él no puede engañarnos",[67] de tal modo que antes de conocer a Dios ninguna cosa se puede saber perfectamente,[68] ya que esas verdades son inmutables y eternas, porque Dios así lo quiso, porque así lo dispuso.[69]

[57] *Med. de Prim. Phil., Resp. ad sec. obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 141, 3-4; 6-13.
[58] *Princ. Phil.*, II, 64, ed. Adam-Tannery, VIII, pág. 69.
[59] *Reg. ad dir. Ing.*, XIIª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 412.
[60] *Ep. ad P. Dinet.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 580.
[61] *Reg. ad dir. Ing.*, XIIª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 413.
[62] *Ibid.*, XIVª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 446, 15-17.
[63] *Princ. Phil.*, II, 64, ed. Adam-Tannery, VIII, pág. 79, 6.
[64] *Ep. ad Beeckman*, 17 de octubre del 1630, ed. Adam-Tannery, I, pág. 159.
[65] *Med. de Prim. Phil.*, Vª, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 65, 9-14.
[66] *Ibid.*, ed. Adam-Tannery, VII, págs. 65, 28-66, 1.
[67] *Ibid.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 70, 10-12.
[68] *Ibid.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 71.
[69] *Ibid.*, *Resp. ad quintas obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 380.

"Dios no quiso que los tres ángulos de un triángulo fuesen iguales a dos rectos, porque conoció que no podía ser de otra manera, sino al contrario, ... porque quiso que los tres ángulos de un triángulo fuesen iguales a dos rectos, por eso ya es verdadero y no puede ser de otra manera." [70] "Ni hay necesidad de investigar por qué razón Dios podría hacer desde toda la eternidad que no fuese verdad que dos por cuatro son ocho, etc., pues confieso que esto no puede ser entendido por nosotros." [71]

Los mismos escépticos, "que dudaban aun de las mismas demostraciones geométricas, no lo harían si conociesen a Dios como conviene".[72]

Sin embargo, Descartes cree "haber encontrado cómo se pueden demostrar las verdades metafísicas de una manera que es más evidente que las demostraciones de la Geometría", aunque confiesa que lo dice según su parecer, porque no sabe si podrá persuadir a los demás.[73]

6. *El infinito*

Admite Descartes la divisibilidad en infinito, aunque reconoce llanamente que no puede comprender infinitas divisiones en una cantidad finita, porque el entendimiento, que es finito, no comprende el infinito.[74]

El número infinito difiere naturalmente del 2 o del 4,[75] o de otro número cualquiera, siempre más grande, porque no se puede llegar contando al número máximo de todos los números, por lo cual confiesa que en el modo de contar hay algo que sobrepasa sus fuerzas, de modo que estima haber recibido esa facultad de poder pensar *siempre un número mayor, no de sí mismo, sino* de un ser más perfecto que él.[76]

Sostiene que el proceso al infinito no puede darse en las causas de tal manera subordinadas entre sí que la inferior no pueda obrar sin la superior,[77] ni con respecto a las ideas que están en nosotros, ya que nosotros nos sentimos limitados,[78] ni con relación a las obras de Dios, el cual es infinito, y por tanto no es posible señalar algún límite a sus obras,[79] aunque el proceso en sí mismo no repugne, ya que efectivamente se da en la división de esas partes de la materia.[80]

"Es necesario observar —dice Descartes— que yo jamás uso la palabra infinito para significar solamente el no tener fin, a lo cual aplico la palabra

[70] *Ibid., Resp. ad sext. obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 432, 16-18.
[71] *Ibid., Resp. ad sext. obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 436, 12-15.
[72] *Ibid., Resp. ad quintas obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 384, 9-12.
[73] *Ep. ad P. Mersenne,* 15 de abril del 1630, ed. Adam-Tannery, I, pág. 144.
[74] *Med. de Prim. Phil., Resp. ad pr. obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 106.
[75] *Ibid., Resp. ad sec. obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 137.
[76] *Ibid., Resp. ad sec. obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 139.
[77] *Ibid., Resp. ad quintas obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 370.
[78] *Ep. ad Clerselier,* 15 de abril del 1649, ed. Adam-Tannery, V, pág. 355.
[79] *Cf. Ep. ad P. Mesland,* 2 de mayo del 1644, ed. Adam-Tannery, IV, pág. 113.
[80] *Ep. ad Clerselier,* 15 de abril del 1649, ed. Adam-Tannery, V, pág. 355.

indefinido, sino para significar una cosa real, que es incomparablemente más grande que todas aquellas que tienen algún fin." [81]

Una cosa interesante es ver cómo Descartes admite grados en los distintos infinitos. El célebre P. Mersenne le proponía esta dificultad contra una línea infinita. Si hubiera una línea infinita, tendría un número infinito de pies y de toesas[82] y, por consiguiente, el número infinito de pies será seis veces mayor que el número de toesas. Luego este número no es infinito. Descartes "concede Todo" al P. Mersenne, pero "le niega la consecuencia".

A una nueva instancia: "pero un infinito no puede ser más grande que otro", responde decididamente: "¿Por qué no? ¿Qué absurdo hay en ello, principalmente si es solamente más grande en razón finita, como en el caso dado, en el cual la multiplicación por seis es una razón finita, que nada tiene que ver con el infinito?" Y añade: "¿Qué razón tenemos nosotros de juzgar si el infinito puede ser más grande que otro o no, visto que dejaría de ser infinito, si nosotros lo pudiésemos comprender?" [83]

"¿Cómo conocemos el infinito?" Descartes responde con claridad: "Es certísimo decir que no concebimos el infinito por la negación de lo finito; y de que la limitación contenga en sí la negación de lo infinito, sería vano inferir que la negación de la limitación o de lo finito contenga el conocimiento del infinito; porque lo que hace diferenciar lo infinito de lo finito es real y positivo y, en cambio, la limitación por la cual lo finito difiere de lo infinito es un no ser o una negación del ser. Ahora bien, lo que no es no puede conducirnos al conocimiento de lo que es, pero al contrario, por el conocimiento de una cosa, se puede concebir su negación. Y, aunque en otra ocasión dije que bastaba que nosotros concibiésemos una cosa que no tiene límites para concebir el infinito, seguí en eso la manera más usada de hablar, como también retuve el nombre de 'Ser infinito', que más propiamente debería ser llamado el 'Ser más amplio', si queremos que cada nombre sea conforme a la naturaleza de cada cosa." [84]

Otras sentencias cartesianas sobre el infinito no vienen a nuestro propósito, por referirse a Dios, cuyo atributo fundamental, según nuestro filósofo, es precisamente la infinitud.[85]

7. *El método de las Matemáticas*

Los geómetras siguen este orden; anteponen todo lo que se requiere para deducir una proposición.[86]

81 *Ibid.*, ed. Adam-Tannery, V, pág. 356, 1-7.
82 Toesa: antigua medida francesa de longitud, equivalente a 1.949 m.
83 *Ep. ad P. Mersenne*, 15 de abril del 1630, ed. Adam-Tannery, I, págs. 146, 28-147, 5.
84 *Ep. ad****, agosto del 1641, ed. Adam-Tannery, III, págs. 426, 27.
85 *Ep. ad Clerselier*, 15 de abril del 1649, ed. Adam-Tannery, V, pág. 355.
86 *Med. de Prim. Phil., Synopsis*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 13.

La larga serie de definiciones, postulados, axiomas, teoremas y problemas está trabada de tal manera que si se quiere negar algo de los consiguientes, se demuestra inmediatamente que ya está contenida en los antecedentes y de esa manera se arranca el consentimiento del lector, aunque esté contrariado y sea pertinaz.[87] Éste es el método usado por los antiguos geómetras en sus obras.[88]

Los problemas de matemáticas no se deben poner al principio (cuando apenas hemos podido descubrir algunas reglas poco claras, que más bien parecen nacidas en nuestro espíritu que ser frutos de nuestro estudio), sino después de haber buscado con todo empeño todo lo que es necesario para el examen de la verdad.[89] "Así, por ejemplo, si por muchas operaciones descubrimos al principio qué relación existe entre una primera y una segunda cantidad, luego entre la segunda y una tercera, luego entre la tercera y una cuarta, y por fin entre la cuarta y una quinta, yo no veo por eso qué relación hay entre la primera y la quinta, y no lo puedo deducir de las relaciones ya conocidas, si no las recuerdo todas; por eso es necesario recorrerlas todas de nuevo en mi pensamiento, hasta que pase de la primera a la última tan rápidamente que parezca que, casi sin la ayuda de la memoria, comprenda toda la serie con una sola intuición." [90]

Así quedan como encadenadas las proposiciones, de tal manera que si se compara cada una de ellas con la que precede y con la que le sigue, nos damos cuenta fácilmente cómo la primera y la última están también en relación una con otra, aunque nosotros no deduciríamos fácilmente de las extremas las proposiciones intermedias.[91] Por eso recomienda a sus mejores amigos "que se tomen el trabajo de examinar su Geometría; lo cual no se podrá hacer sino con la pluma en la mano y siguiendo todos los cálculos que hay, los cuales pueden parecer al principio difíciles por la falta de costumbre".[92] Y felicita a otro por haber encontrado la resolución de algunos problemas sólidos con la hipérbole: "Yo no creo —le escribe— que sea posible encontrar una más hermosa que ésta." [93]

8. *Relación con el mundo real*

Poco cuidan la Aritmética y la Geometría de saber si sus objetos existen o no en la naturaleza de las cosas.[94] Debe, sin embargo, existir lo que clara y distintamente se entiende, o sea todas las cosas que generalmente se compren-

[87] *Ibid., Resp. ad sec. obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 155.
[88] *Ibid., Resp. ad sec. obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 156.
[89] *Reg. ad dir. Ing.*, VIIIª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 397.
[90] *Ibid.*, XIª, ed. Adam-Tannery, X, págs. 408, 25-409, 7.
[91] *Ibid.*, XVIIª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 460.
[92] *Ep. ad P.****, octubre del 1637, ed. Adam-Tannery, I, pág. 457, 16-20.
[93] *Ep. ad P. Mersenne,* 11 de diciembre del 1643, ed. Adam-Tannery, IV, pág. 57, 3-5.
[94] *Med. de Prim. Phil.*, Iª, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 20.

den como el objeto de la Matemática Pura,[95] aunque se pueden tener ideas matemáticas sin su correspondiente en la realidad, pues, aun sin existir el triángulo, sabemos que tiene "una cierta naturaleza determinada, o una esencia, o una forma inmutable y eterna".[96]

Un hombre, dice Descartes, que se ocupe solamente de matemáticas, no encontrará muchas veces todo lo que un físico pueda encontrar. Cita el ejemplo de la línea anaclástica en la dióptrica.[97]

"Muchas veces en Geometría se pueden hacer muchas suposiciones sobre una cantidad que en nada debilitan la fuerza de las demostraciones, aunque muchas veces en Física se tenga otra idea de la naturaleza de esta cantidad." [98]

Muchas cosas que son idénticas, si se las considera solamente bajo el aspecto de la dimensión, son muy diferentes en la realidad. A los matemáticos toca la primera consideración, a los físicos la segunda.[99]

Unas cuestiones concretas estudia detenidamente Descartes.

1) La extensión ocupa lugar.

"La extensión —dice— se toma por aquello que tiene extensión; efectivamente, yo concibo enteramente la misma cosa, cuando digo: 'La extensión ocupa lugar' que si digo 'Lo que tiene extensión ocupa lugar'. Y, sin embargo, no se sigue de eso que sea mejor, para evitar el equívoco, servirse de estas palabras 'Lo que tiene extensión', porque ellas no expresan tan claramente lo que concebimos, o sea, que un sujeto cualquiera ocupe el lugar, porque tiene extensión. Tal vez alguno entendería solamente que aquello que tiene extensión es un sujeto que ocupa el lugar, como si yo dijese que un ser animado ocupa el lugar."

Ésa es la razón por la cual Descartes dice en sus *Reglas para la Dirección del Espíritu* de la extensión, más bien que de lo que tiene extensión, aunque para él la extensión no debe ser comprendida sino precisamente por lo que tiene extensión.[100]

2) Cuando decimos: "Un cuerpo tiene extensión", aunque comprendemos que en esta frase "extensión" significa una cosa diferente de cuerpo, sin embargo no formamos en nuestra imaginación dos ideas distintas, una de cuerpo y otra de extensión, sino una sola; la de un cuerpo que tiene extensión. En el fondo es como si yo dijera: "Un cuerpo tiene extensión", o mejor, "Lo que tiene extensión tiene extensión".

Esto es peculiar de todo ser que no existe sino en otro y que no puede ser comprendido sin un sujeto. Otra cosa es de los seres que se distinguen realmente de sus sujetos. Si yo digo: "Pedro posee riquezas", la idea de Pedro

[95] *Ibid.*, VIª, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 80.
[96] *Ibid.*, *Resp. ad pr. obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 104, 21-23.
[97] *Reg. ad dir. Ing.*, VIIIª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 393.
[98] *Ibid.*, XIIª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 412, 10-13.
[99] *Ibid.*, XIVª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 448.
[100] *Ibid.*, XIVª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 443.

es enteramente diferente de la idea de riquezas: lo mismo cuando digo: "Pablo es rico", yo imagino una cosa completamente diferente de cuando digo: "El rico es rico." Por no percibir esta diferencia, la mayor parte piensa erróneamente que la extensión contiene algo distinto de lo que tiene la extensión, como las riquezas de Pablo son algo distinto de Pablo.[101]

3) Por fin, cuando se dice: "La extensión no es un cuerpo", la palabra "extensión" se toma en otro sentido diferente, y en este sentido no le corresponde ninguna idea particular en la imaginación sino que proviene completamente de la inteligencia pura, que es la única que tiene la facultad de distinguir separadamente los seres abstractos de esta especie.

Esto, para la mayoría, es una ocasión de error; porque, no observando que la extensión así tomada no puede ser concebida por la imaginación, hace de la misma una verdadera idea; y como esta idea implica necesariamente la concepción del cuerpo, si ellos dicen que la extensión así concebida no es un cuerpo, se enredan sin saberlo en esta proposición, que la misma cosa al mismo tiempo es cuerpo y no es cuerpo.

Es muy importante distinguir las personas en las cuales las palabras extensión, figura, número, superficie, línea, punto, unidad, y otras parecidas tienen una significación tan rigurosa que excluyan cualquiera otra cosa, de las que realmente no son distintas, como cuando se dice, la extensión o la figura no es un cuerpo, el número no es la cosa contada, la superficie es el límite de un cuerpo, la línea es el límite de la superficie, el punto es el límite de la línea, la unidad no es una cantidad, etc. Todas estas proposiciones y otras semejantes deben ser excluidas de la imaginación, aunque sean verdaderas.[102]

9. *Facultades matemáticas*

Llamo aquí facultades matemáticas a las humanas que más intervienen en el estudio de estas ciencias, según Descartes, es decir, los sentidos externos, la imaginación, la memoria y el entendimiento, aunque desconfíe mucho de la memoria.

"Es útil también, en la mayor parte del tiempo, trazar las figuras y presentarlas *a los sentidos exteriores* para tener más fácilmente nuestro espíritu atento con este medio. La manera como es necesario trazar estas figuras, para que en el momento que ellas se presentan a nuestros ojos se reflejan más distintamente en nuestra imaginación, se explica por ella misma." Y sigue poniendo ejemplos de diversas representaciones de la unidad y otras cosas.[103]

"El estudio de las Matemáticas ejercita principalmente *la imaginación*

[101] *Ibid.*, XIVª ed. Adam-Tannery, X, pág. 444.
[102] *Ibid.*, XIVª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 444.
[103] *Ibid.*, XVª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 453.

en la consideración de las figuras y de los movimientos y nos acostumbra a formar nociones distintas de los cuerpos." [104]

"Notemos en general que no es necesario confiar *a la memoria* ninguna de las cosas que reclaman una atención constante, de modo que podemos confiar al papel, por miedo que el problema superfluo de acordarnos, sustraiga alguna parte de nuestro espíritu al estudio del objeto presente. Es necesario disponer de un pizarrón para escribir desde el principio los términos de la cuestión, tal como se habrán presentado la primera vez. Después de la manera de donde se les abstrae y las figuras por las cuales se representa, para que, después de haber encontrado la solución, en las señales mismas, podamos fácilmente, y sin la ayuda de la memoria, aplicarlas a la materia particular de que se trate." [105]

"La distinción entre la imaginación y *el entendimiento* se percibe claramente en las matemáticas.

Cuando imagino un triángulo, no sólo entiendo que es una figura limitada por tres lados, sino que al mismo tiempo intuyo estas tres líneas como presentes en el campo de la mente, y esto es lo que llamo imaginar. Pero si quisiese pensar el quiliágono, es verdad que también entiendo que es una figura de mil lados como entiendo que el triángulo es una figura de tres, pero no me imagino del mismo modo esos mil lados o los intuyo como presentes. Y, aunque entonces por la costumbre de imaginar siempre algo, cuando pienso en una cosa corporal, me represente tal vez confusamente alguna figura, es claro no obstante que no es un quiliágono, porque en nada se diferencia de la que me representaría si pensase en un miriágono, o en cualquier otra figura de más lados y en nada me ayuda para conocer las propiedades que distinguen al quiliágono de los otros polígonos. Si se trata, en cambio, del pentágono, puedo ciertamente entender su figura, como la figura del quiliágono, sin ayuda de la imaginación; pero puedo también imaginarla, es decir, aplicar la fuerza de la mente a sus cinco lados y al mismo tiempo al área limitada por los mismos. Y así advierto manifiestamente que para imaginar necesito un cierto esfuerzo del alma, que no necesito para entender. Este nuevo esfuerzo del alma manifiesta claramente la diferencia entre la imaginación y la pura intelección." [106] En otro lugar explica también Descartes esta diferencia con el ejemplo de lo que imaginamos en la cera y de lo que pensamos sobre la cera, parecido a lo del pentágono.[107]

Aunque la imaginación abarque muchas cosas, como los colores, sonidos, sabores, dolores y cosas semejantes, ninguna imagina tan distintamente como la naturaleza corporal, que es objeto de la matemática pura.[108]

[104] *Ep. ad Elizabeth*, 28 de junio del 1643, ed. Adam-Tannery, III, pág. 692, 12-15.
[105] *Reg. ad dir. Ing.*, XVIª, ed. Adam-Tannery, X, pág. 458, 9-20.
[106] *Med. de Prim. Phil.*, VIª, ed. Adam-Tannery, VII, págs. 72, 4, 73, 4.
[107] *Ibid.*, *Resp. ad tert. obj.*, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 178, 19-24.
[108] *Ibid.*, VIª, ed. Adam-Tannery, VII, pág. 74.

10. *La Teoría de las Matemáticas*

Nunca habla Descartes de Filosofía de las Matemáticas, pero en una carta, fechada el 8 de febrero de 1640 dirigida a Hogelande, recogida en el último tomo de la edición de las *Obras Completas* de Adam-Tannery, habla de una Teoría de las Matemáticas que podría ser lo equivalente de una Filosofía de las Matemáticas, aunque no en el sentido tan amplio que lo hemos entendido en este ensayo.

Quiero señalar los pasos más notables de dicha carta, en la que habla de una obra titulada *Idea Matemática*, de un tal John Pell († 1650).

"Suelo distinguir en las Matemáticas dos cosas, a saber, la historia y la ciencia. Entiendo por historia todo lo que ya ha sido encontrado y se contiene en los libros. Por ciencia, en cambio, la pericia en resolver todas las cuestiones, y encontrar por su propia industria todo lo que puede encontrar el entendimiento humano en dicha ciencia. El que posee dicha ciencia ciertamente no desearía mucho las cosas ajenas y por eso muy justamente se llama autárquico. Y aunque no debe ser completamente ignorante de todo lo que se contiene en los libros, le basta, sin embargo, una noticia general, que no puede dejar de adquirir al recorrer los autores principales, de tal modo que, si alguna vez lo necesita, pueda volver a los lugares en que están consignados. Hay, en efecto, muchas cosas que mucho mejor se conservan en los libros que en la memoria, como son las observaciones astronómicas, las tablas, los teoremas y, finalmente, todo aquello que no se adhiere a la memoria, después de haber sido conocido una vez; porque cuanto con menos cosas la llenemos, más apto conservaremos nuestro ingenio para aumentar la ciencia. Pero sería muy de desear que esa historia matemática que, distribuida en muchos volúmenes, todavía no está íntegra y perfecta, se reuniese toda entera en uno solo. Para esto no serían necesarios muchos gastos en buscar y comprar los libros. Porque, tomando unos autores muchas cosas de otros, no hay nada en alguna parte que no se encuentre en cualquier biblioteca medianamente provista, ni se requeriría tanta diligencia en buscar todo, sino juicio para rechazar lo superfluo y ciencia para suplir lo que todavía no se ha inventado; cosa que nadie haría mejor que vuestro matemático autárquico. Si se diese tal libro, cada uno fácilmente podría aprender en él toda la historia matemática y también alguna parte de la ciencia; pero nadie seguramente será un matemático autárquico, sino el que haya además obtenido de la naturaleza un grande ingenio para eso y lo hubiere pulido con el largo ejercicio. Baste esto sobre la Teoría de las Matemáticas." [109]

Así concluye Descartes su breve exposición. Así quiero concluir también este ensayo que he elaborado sobre la base de los textos esparcidos en los doce volúmenes de sus Obras Completas.

José Álvarez Laso

[109] *Ep. ad Hogelande*, ed. Adam-Tannery, *Supplément*, págs. 1-4.