Diánoia, vol. 12, no. 12, 1966

los escritos metafísicos: *Meditationes* y *Principia.* Conforme a esta otra concepción de la idea, ya no se la considera a ésta en su función presentativa; ahora la idea *representa* al ente. Ya no es el ente el que se patentiza ante el entendimiento gracias a la idea; ahora es la idea misma la que, a manera de nuevo ente, está presente ante el entendimiento e impide la contemplación del ente que ahora ella representa. Cómo es posible la presencia de esta otra concepción de la idea en Descartes, lo explica el autor en el capítulo III. En ese lugar se muestra cómo una noción equivocada de sustancia, que hereda Descartes de la tradición, lo lleva a dar una interpretación equivocada del principio; interpretación que conduce, en última instancia, a la cosificación del mismo.

La importancia que tiene el libro de Villoro, no radica tanto en las tesis que presenta, sino en lo que éstas significan en la medida en que abren nuevas perspectivas en la investigación filosófica de lengua hispana.

JOSÉ ANTONIO ROBLES

Hermann Weyl, *Filosofía de las matemáticas y de la ciencia natural,* Trad. de Carlos Ímaz, Centro de Estudios Filosóficos (Col. Filosofía Contemporánea), UNAM., México, 1965.

En 1926, Weyl redactó un artículo para el *Handbuch der Philosophie,* con el título de "Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft", el cual sirvió de núcleo original para el libro que, con el mismo título, apareció en inglés en 1949 y del cual el que ahora se comenta es traducción española.

Desde la publicación de su opúsculo, *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis* (1918), la posición de Weyl, respecto a la fundamentación de las matemáticas, se perfiló por el lado del intuicionismo. Esta tendencia, representada principalmente por L. E. J. Brower, para algunos constituye una prolongación del "empirismo" de Borel y de Lebesgue; sin embargo, en cuanto uno de los principales problemas planteados es el del infinito, pueden verse también antecedentes en Gauss, quien en 1831 escribía: "protesto..., contra el uso de una magnitud infinita como algo completo, ya que esto jamás es permisible en matemáticas" *(Werke,* VIII, p. 216), o en el análisis desde el tiempo de Cauchy, para el cual el uso de la palabra "infinito", como en la proposición "la función log *n* tiende a infinito, en cuanto *n* tiende a infinito", sólo puede significar una abreviación para expresar formas más complicadas que se refieren únicamente a números finitos. En el libro de Weyl, la pugna se plantea principalmente frente a la corriente axiomática y formalista de David Hilbert, aunque no faltan referencias a la tendencia logicista de Bertrand Russell. No obstante, es curioso que el logicismo reciba menos ataques que el formalismo hilbertiano, ya que en los *Principia Mathematica* se puede encontrar el pleno desarrollo de la concepción Cantor-Zermelo, radicalmente discrepante del intuicionismo. Es bastante patente la distancia que puede separar al intuicionismo de las concepciones de Cantor y, por su parte, el axioma de selección de Zermelo es esencialmente no-constructivo. Mucho más cerca están Kronecker y Poincaré. Lo mismo Heyting quien, respecto a la lógica simbólica, expuso ya su tendencia intuicionista en un artículo publicado en el año de 1930, en *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften.*

Hay quienes opinan que las diferencias entre formalismo, axiomatización, logicismo e intuicionismo se han diluido bastante, de tal suerte que los fuertes contrastes iniciales, a la fecha se encuentran bastante atenuados. Para ellos, autores como Quine representarían la conjugación de logicismo y axiomatismo; y el intuicionismo habría entrado en la vía de la axiomática formal en seguimiento del propio Heyting. No obstante, si se toma en cuenta que el trabajo de Weyl que nos ocupa, aunque reestructurado y ampliado en 1946, realmente nació veinte años antes y es bastante cercano a la publicación de *Das Kontinuum,* resulta natural el que las posiciones intuicionistas y axiomático-formalistas se encuentran claramente confrontadas en él. Además, bien podría discreparse de los autores que ven desdibujarse las fronteras entre unas posiciones y otras, pues tal vez los arranques de fondo de cada una de ellas no pemitirán otra cosa sino interrelaciones periféricas, ya que responden a tipos de mentalidades matemáticas esencialmente diferentes y, quizá, irreductibles.

Según Weyl, hay un peligro básico en conferir a los números el carácter de objetos ideales. Hacer esto significa dar un paso a lo absoluto, paso que es más bien un salto ya que significa convertir a los números en existencias fuera de este mundo. Y esto no sólo con respecto a los números naturales, cuya sucesión está constantemente abierta; sino, igualmente, en lo que respecta al *continuo,* que admite una subdivisión constante. En uno y en otro dominio se presenta, aunque en forma distinta, el infinito. Por un lado, lo infinitamente grande; por el otro, lo infinitamente pequeño. En cuanto a esto último, Weyl recuerda que ya Leibniz, frente a Bernouli, rechazaba la existencia de elementos infinitamente pequeños. Bernouli argumentaba que si diez miembros están presentes, el décimo debe existir; si cien miembros son los presentes, entonces debe existir el centésimo; y si el número es infinito, el infinitésimo existe. Leibniz no concluía del argumento la existencia de un elemento infinitamente pequeño, sino de una fracción *finita* tan pequeña como se quisiera. La postura de Leibniz, aunque lentamente y con trabajos, va a desembocar en la teoría de los límites, admitida la cual, el existente infinitamente pequeño resulta superfluo. Esto se expresa ya claramente en D'Alambert para quien la base del cálculo diferencial (la base "metafísica", dice él) se encuentra en la teoría de los límites, y el cálculo mismo no trata de cantidades infinitamente pequeñas, sino sólo de los límites de cantidades finitas.

Sin embargo, dentro del propio análisis matemático moderno, según Weyl, se vuelve al sentido platónico del continuo cuando las bases del análisis se apoyan en la teoría de los conjuntos. La misma teoría ha llegado a impregnar a la de los números naturales. La sucesión de los números es un conjunto *completo N* en el cual son posibles transformaciones uno a uno de *N* sobre un subconjunto del mismo que no coincide con la totalidad de *N;* el hecho de la existencia de tales transformaciones demuestra que *N* es un conjunto *infinito.* La finitud se establece por la vía inversa, esto es, cuando se demuestra la imposibilidad de tales transformaciones. Y el que se presenten contradicciones tiene como causa el tratar como un agregado cerrado de objetos (el conjunto infinito), algo que sólo es un campo de posibilidades constructivas.

Para Weyl, es Brower quien desde 1907 diseña un sistema de matemáticas que puede evitar definitivamente el salto a lo absoluto, es decir al platonismo. Pero este sistema tiene diversas consecuencias. Una proposición existencial, por ejemplo, "existe un número par", requeriría de la validez de una suma lógica infinita (1 es par o 2 es par o 3 es par... al infinito), pero ésta no es posible de ser llevada a cabo. Por tanto, la proposición existencial, "existe un número par", no se deriva de tal suma. Debe verse más bien como un *abstracto proposicional* derivado de una proposición real del tipo "2 es un número par", en donde "par" saca su significado de haber definido al 1 como impar y al sucesor de cualquier número como par o impar, según el número mismo sea impar o par. El abstracto proposicional, afirma Weyl, "no es más que un documento que indica la presencia de un tesoro sin indicar su posición. Su único valor estriba en que puede hacerme buscar el tesoro. Es un pedazo de papel sin valor a menos de que esté avalado por una proposición real..." (p. 56). Los abstractos proposicionales carecen de sentido existencial en virtud de que sólo señalan la *posibilidad* de una construcción; mientras que es ésta misma, cuando efectivamente está llevada a cabo, la que confiere tal sentido. Por ello, el principio de la inducción completa —instrumento principal del intuicionismo, al que Weyl llama "verdadero y único poder de las matemáticas" e "intuición matemática original"— no debe ser encerrado en una fómula, sino ser aplicado concretamente en cada paso.

El intuicionismo, con su principio de inducción completa y sus definiciones recursivas (a la manera como se definió "par"), entraña, respecto a la lógica clásica, una separación radical en cuanto al principio del *tercio excluso*. Mientras que en la lógica tradicional formal el *tertium non datur* tiene plena vigencia, en la corriente intuicionista no. Para la lógica tradicional la fórmula "X v –X" constituye un principio lógico válido; pero el intuicionismo no lo acepta. Weyl, al ejemplificar este principio que rechaza, alude curiosamente a la alternativa entre dos proposiciones con los mismos términos, pero una de ellas universal y la otra existencial con predicado complementario al de la primera. Dice: "O bien todos los números tienen la propiedad *A*, o bien existe un número con la propiedad –*A*." Como bien se ve, se trata de una de las parejas de proposiciones contradictorias —"*A* y *O*"— del cuadro clásico de oposición. Ahora bien, en dicho cuadrado de la verdad de una proposición "*A*" se infiere inmediatamente la falsedad de una proposición "*O*" y, a la inversa, de la verdad de una proposición "*O*" se infiere inmediatamente la falsedad de una proposición "*A*". Estas combinaciones de valores de verdad constituyen la validez de una alternativa exclusiva y coinciden con las combinaciones válidas para la fórmula inclusiva, "X v –X", en una lógica tradicional bivalente. Pero, además del rechazo del principio, Weyl utiliza el ejemplo mencionado porque quiere destacar firmemente que la negación de una proposición universal si bien, produce una proposición existencial, ésta resulta vacía ya que no proviene de una proposición real. Como en el caso anterior de la proposición "existe un número par", las proposiciones existenciales tales como *existe un número n tal que A(n)* o *existe un número n tal que –A (n)* sólo adquieren significado intuitivo parcial o abstrato en cuanto se deriven de proposiciones reales que proporcionen ejemplos particulares o, al menos, en cuanto se ofrezca un método constructivo por medio del cual podrían obtenerse tales ejemplos concretos. Brower expresa que la creencia de que el principio del *tercio excluso* posee absoluta validez, "fue causada históricamente por el hecho de que, en primer lugar, la lógica clásica fue abstraída de las matemáticas de los subconjuntos de un conjunto finito determinado (es decir, un conjunto determinado por exhibición de sus elementos), en segundo lugar, se le adscribió a esta lógica una existencia *a priori* independiente de las matemáticas, y finalmente, basándose en esta supuesta aprioridad fue aplicada sin justificación a la matemática de los conjuntos infinitos" (*Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 28, 1928). Weyl cita este pasaje —que por otra parte, ha sido muy socorrido— y se hace solidario de su contenido.

Bertrand Russell considera (*The Principles of Mathematics*) que la no aceptación del principio del *tercio excluso* por el intuicionismo, significa que no se puede considerar a una proposición como verdadera o como falsa mientras no exista un método que decida la alternativa. Como consecuencia, grandes partes del análisis matemático, que se pensaban bien establecidas, resultan ser dudosas; por ejemplo, la prueba de que hay más números reales que números racionales o que en la serie de los números reales cualquier progresión tiene un límite (principio de Dirichlet). El sacrificio de estas partes del análisis se hace *por mor* de conservar a la matemática en contacto íntimo con la intuición y dentro de su marco. El método axiomático hilbertiano amplía más su campo porque no se pretende asegurar con él la veracidad de la matemática, esto es, la intuición evidente de sus proposiciones, sino la consistencia de la totalidad del sistema. Naturalmente que esto, en Hilbert, se consigue al precio de manipular símbolos que no siempre admiten una interpretación material. La consistencia entraña simplemente ausencia de contradicción lógica entre los axiomas, entre los teoremas y los axiomas y entre los teoremas entre sí. Pero los símbolos dejan de ser símbolos *de* algo y la matemática se convierte en el juego regulado que los manipula. Por ello dice Weyl: "La matemática de Hilbert puede ser un bonito juego de fórmulas, más divertido aún que el ajedrez; ¿pero qué relación tiene con el conocimiento, si sus fórmulas no tienen ningún sentido material en virtud del cual puedan expresar verdades intuitivas?" (p. 67). Sin embargo, los partidarios de la axiomática pretenden que en relación al conocimiento es considerable el alcance de las nuevas teorías; sobre todo, en cuanto contribuyen a desplazar el interés del contenido hacia la estructura. En este sentido, Weyl mismo reconoce que cualquiera que pueda ser el mérito último del programa de Hilbert, es innegable que ha contribuido a descubrir la complicada trama lógica de las matemáticas. Pero el intuicionismo pide que las matemáticas proporcionen también una intuición concreta porque su función es estar al servicio de las ciencias naturales esto es, de las ciencias de lo concreto.

Del lado axiomático ocurren frecuentemente malos entendimientos, o entendimientos superficiales, de lo que significa el intuicionismo. Esto sucede cuando el término mismo "intuición" es tomado sin precauciones y atendiendo más a la connotación vulgar y lata, que al significado estricto dentro de la teoría. Blanché *(L'Axiomatique)*, por ejemplo, afirma que los matemáticos desconfían cada vez más de la noción de evidencia; que el sentimiento de evidencia es engañoso y varía su dominio según el temperamento intelectual de cada uno; que los espíritus intuitivos pedirían que se suprimiera más de una demostración menos evidente que el teorema que tal demostración justifica. Estas ideas de la intuición, que responden a connotaciones extra-teóricas, no pueden ser aplicables a las tesis de de Weyl, para quien la *intuición* no es un criterio personal y variante, sino el producto de la aplicación del método de la inducción completa y las definiciones recursivas. Más aún, afirma que en los teoremas existenciales de la matemática, lo que tiene valor no es el teorema como tal, sino la construcción llevada a cabo en su demostración; sin la demostración constructiva, el teorema sólo sería una vana sombra (p. 56).

El énfasis que el intuicionismo pone en los métodos constructivos, repercute en los problemas del infinito y del continuo. Este último ya no aparece como un agregado de elementos fijos sino como medio de un libre devenir. Y el primero deja de ser considerado como actual, completo o existente, absoluto platónico independiente de cualquier procedimiento de generación, y pasa a ser tratado sólo como algo potencial, adviniente, supeditado a un proceso de construcción.

Ahora bien, si la función de las matemáticas es estar al servicio de las ciencias naturales, resulta extraño, al menos, que Weyl no exija de las proposiciones de la física, por ejemplo, lo que con tanta insistencia y empeño pide de las proposiciones de la matemática: el que comporten un significado intuitivo. Expresamente afirma que lo que se pone a prueba al confrontar la física teórica con la experiencia es la *totalidad* de aquélla y no el significado concreto de cada una de sus proposiciones. El mismo criterio que separa a Weyl de Hilbert en las matemáticas, lo acerca en el campo de la física teórica. No parece desacertado el juicio de Kleene, quien al referirse a Weyl expresa: "When mathematics in taken for itself alone, he would restrict himself with Brower to the intuitive truths; he does not find a sufficient motive to go further. But when mathematics is merged completely with physics in the process of theoretical world construction, he sides with Hilbert" *(Introduction to Metamathematics,* 3ª reimpresión, p. 58).

Un capítulo dedicado a la geometría sirve de transición entre la primera parte y aquella dedicada a las ciencias naturales, ya que, afirma Weyl, en ella se influyen mutuamente las matemáticas, las ciencias naturales y la filosofía. Finalmente, seis apéndices completan el volumen, y le prestan variedad al tocar distintos temas tanto de matemáticas, cuanto de diversas disciplinas de la ciencia natural.

HUGO PADILLA