

Demostración leibniziana de las fórmulas numéricas

PEDRO A. VIÑUELA

Instituto de Filosofía

Pontificia Universidad Católica de Chile

pvinuela@uc.cl

Resumen: El presente artículo examina puntos centrales de la teoría leibniziana de la prueba matemática en conexión con su concepción general de la ciencia. Se analizan, primeramente, las características generales del método leibniziano, oponiéndolo al método cartesiano (§§ 1–3). Puesto que para Leibniz las fórmulas numéricas no son verdades lógicas primitivas y por ello requiere una estricta prueba formal, a continuación se examina la demostración de ellas contenida en los *Nuevos ensayos*, mencionando las críticas que Frege y Poincaré le han dirigido, a fin de precisar y aclarar el significado del formalismo leibniziano (§§ 4–6). Se finaliza con un recuento evaluativo de lo realizado en este trabajo (§ 7).

Palabras clave: método, evidencia, intuición, formalismo, simbolismo

Abstract: This paper is intended to analyze the Leibnizian theory of mathematical proof, in relation to his general view on science. Firstly, it provides the main characteristics of Leibniz's method, making a strategic contrast with the Cartesian one (§§ 1–3). Secondly, because for Leibniz the numerical formulae are not primitive logical truths, they require a rigorous formal proof, so that the corresponding demonstration given in the *New Essays* is examined in order to gain new insights into the so-called Leibnizian formalism, taking into account as well Frege's and Poincaré's criticisms to it (§§ 4–6). Finally, it offers an evaluative account of all these considerations (§ 7).

Key words: method, evidence, intuition, formalism, symbolism

Después de que uno se haya convencido de la inmovilidad de una roca por los vanos intentos de moverla, puede uno preguntar además qué la sostiene con tanta seguridad.*

FREGE

§ 1. Encontrar, elaborar y exponer el auténtico método de todo el saber constituye uno de los ejes centrales en torno al cual gira buena parte de los principales problemas y las discusiones sistemáticas más relevantes

*“Nachdem man sich von der Unerschütterlichkeit eines Felsblockes durch vergebliche Versuche, ihn zu bewegen, überzeugt hat, kann man ferner fragen, was ihn denn so sicher unterstütze” (*Die Grundlagen der Arithmetik*, § 2).

que dan forma y carácter distintivo a toda la filosofía moderna. Este método general debía responder naturalmente al tipo de conocimiento considerado eminente. Hobbes, Descartes, Spinoza, Leibniz, Wolff y muchos otros pensadores de primera línea compartieron un ideal común de conocimiento al que todo saber debía ajustarse, para lo cual tenía que alcanzar la claridad, universalidad, necesidad y certeza apodíctica que sólo la matemática parecería ofrecer (*cfr.* L.W. Beck 1993, p. 8). Esto es particularmente claro en el método cartesiano. Como su meta es la certeza (*certitudo*) y el dominio en el que ella reina preferentemente es la matemática, Descartes ve una esencial afinidad entre el verdadero método buscado y el método ya existente de la matemática, por cuanto la aritmética y la geometría son las únicas ciencias fácticamente disponibles (*iam inventa*) que se ajustan al ideal matemático de conocimiento, pues adquieren su saber a través de razones ciertas y evidentes. Puesto que la ciencia misma —para el filósofo francés— es una y todas sus ramas están íntimamente interconectadas, el método debe ser, además, uno y universal.¹ Esta visión del conocimiento en su conjunto lleva precisamente a Descartes a imponerse la tarea de refundar la metafísica o la filosofía primera, en cuanto que es en esta ciencia donde todo el cuerpo del saber hunde finalmente sus raíces y, por ello mismo, proporciona los principios a todas las restantes ramas del saber. Vemos por eso cómo Descartes busca, al margen de la tradición y la historia, refundar la totalidad de la filosofía desde sus cimientos mismos, a efectos de apuntalarla, de una vez por todas, sobre principios absolutamente ciertos y así hacerla entrar por fin en el camino firme y seguro de la *scientia*. Para conseguir este cometido el filósofo galo se propone dudar concienzudamente de todo contenido de conocimiento, dispositivo epistémico que hace posible destruir los antiguos fundamentos e instaurar en su lugar genuinos principios, absolutamente indubitables y evidentes. El método cartesiano de la duda, en cuanto que persigue *ab initio* la certeza, al ser aplicado sistemática y universalmente nos ofrece la mayor certeza imaginable, la evidencia irresistible de la existencia del

¹ Véase *Regulae ad directionem ingenii*, AT X 361. *Cfr.* Garber 1992, p. 13, y también L.J. Beck 1952, pp. 14–30. Para facilitar la remisión a las fuentes usadas, además de las abreviaturas enlistadas al inicio de la bibliografía, agrego en los casos de: *Œuvres* de Descartes, el tomo en números romanos y la página en arábigos; *Opuscles et fragments inédits* de Leibniz, la página respectiva en arábigos; *Die philosophische Schriften* y *Die mathematische Schriften*, de Leibniz, el tomo en romanos y la página en arábigos; *Discurso de metafísica*, de Leibniz, el parágrafo y la paginación según GP; *Nuevos ensayos*, el libro en romanos, el capítulo en arábigos y el parágrafo; *An Essay Concerning Human Understanding*, de Locke, el libro en romanos, el capítulo en arábigos y el parágrafo.

yo pienso. *Dubito, cogito, ergo sum* hace relucir la certeza de que yo soy, en cuanto sujeto meramente pensante, como un momento de iluminación racional autoinducido por la duda hiperbólica. *Ego sum cogitans*² es la enunciación lingüística de la primera verdad del sistema cartesiano y el modelo de toda posible certeza (*mensura veritatis*), desde la cual Descartes pretende establecer su regla epistemológica principal: *Quicquid clare distincteque percipio, verum est.*³ Para él, la verdad tiende a fundirse, de este modo, con la evidencia dada a la conciencia vigilante, pura y atenta, como ciertamente acontece en los razonamientos de los matemáticos.

§ 2. Leibniz no fue en ningún caso ajeno a esta señera disputa sobre el verdadero método. Él critica persistentemente a muchos filósofos anteriores y coetáneos suyos por no poseer una conciencia suficientemente clara del verdadero método de la filosofía —así como de su alcance, significado e implicaciones—, cuyo conocimiento constituye un prerrequisito *sine qua non* para llevar adelante cualquier empresa científica exitosa.⁴ Si se atiende, por ejemplo, a las reglas del método cartesiano, son tan vagas e imprecisas —piensa Leibniz— como el precepto de un alquimista (*praecepto Chemicum*):⁵ “Sume lo que deba y opere lo que deba y obtendrá lo que quiera” (GP IV 329). Algo exactamente similar puede decirse de la duda cartesiana, puesto que, como tantas otras cosas en Descartes —cree Leibniz—, la duda no es sino superchería para el vulgo (*ad populum phalerae*), pues, a juicio del filósofo alemán, el verdadero alcance de la duda metódica no consiste sino en la demostración de los axiomas no idénticos, ya que “si Descartes hubiera querido desarrollar a fondo lo mejor de su precepto, habría debido aplicarse a demostrar los principios de las ciencias [*in demonstrandis principiis scientiarum*]” (GP IV 355). Tal como acontece en geometría y también en aritmética —donde se dan por supuestas la menor cantidad de cosas—, toda ciencia en forma debe tener la menor cantidad posible de axiomas y no debe aceptarlos, en lo posible, sin demostración. Es verdad que la ciencia en sus inicios no debe ser refrenada por exceso de celo formal ni por una

² “Yo soy pensando”.

³ Véase *Discours de la méthode*, AT VI 33; *Meditaciones de filosofía primera*, AT VII 35, AT VII 65, AT IX 52.

⁴ Cfr. Rutherford 1995, pp. 73 ss.

⁵ Traduzco *Chemicum* aquí por ‘alquimista’, porque Leibniz no usa seguramente esta palabra en el sentido propiamente moderno del término *química*, sino más bien haciendo alusión a la práctica de la alquimia, mezcla de ciencia y magia, con todas las connotaciones peyorativas que tal referencia conlleva en este contexto.

desmesurada escrupulosidad en sus procedimientos, por cuanto si se hubiese pretendido demostrar todos los axiomas y reducir por completo las demostraciones a conocimientos intuitivos, probablemente no se habría llegado a poseer una ciencia como la geometría (*cf.* NE IV 2 § 8). Sin embargo, cuando el saber ya se ha consolidado en buena medida y ha logrado una suficiente madurez y seguridad en sí mismo, es necesario —en aras de su claridad y autocomprensión, que redundan, al fin y al cabo, en su propia solidez— profundizar la inteligencia de sus primeros principios, admitidos en un comienzo sin prueba, por razones extrínsecas a la *scientia* misma (*cf.* NE IV 7 § 1).

En un pasaje metodológico importante de un escrito titulado *Quod Ens Perfectissimum existit*,⁶ en el que examina el argumento ontológico cartesiano, Leibniz escribe:

Y no es suficiente que Descartes recurra a la experiencia y que alegue que experimenta en sí mismo clara y distintamente [*in se clare distincteque sentiat*] algo semejante, pues tal cosa es anular la demostración, no resolverla [*abrumpere, non absolvere demonstrationem*], a menos que se muestre [*ostendere*] de qué modo otros pueden acceder también a tal experiencia [*ad ejusmodi experientiam venire*]. Pero siempre que en la demostración alegamos experiencias debemos mostrar también el modo de realizar una experiencia igual [*modum ostendere faciendi eandem experientiam*], si no pretendemos convencer a los demás sólo en virtud de nuestra autoridad. (GP VII 262)

Leibniz muestra aquí cuál es, a su juicio, una de las debilidades mayores de la regla conforme a la cual Descartes pretende fundar la verdad en la percepción clara y distinta, pues, como se ve, el alcance de la crítica leibniziana a la prueba ontológica, contenida en este pasaje, bien puede extenderse a la totalidad del método cartesiano en cuanto fundado en la omnipresencia de la evidencia. En efecto, es inapropiado —juzga el filósofo de Leipzig— intentar basar el conocimiento en la experiencia privada, de difícil acceso público, si no se proporcionan mecanismos claros y controlables que permitan hacerla comunicable a los demás e inducir, de algún modo estándar, su reproducción a voluntad.⁷

⁶ Fechado en noviembre de 1676, GP VII 261–262.

⁷ Véase el interesante apunte de Catherine Wilson a este respecto: “No puede haber medio estándar, intersubjetivo, para medir la claridad y distinción de un pensamiento. Él [Leibniz] vio que el celebrado método cartesiano no es nada más que un intento de legitimación de la autoconfianza casi patológica de su autor. Visión que, como él dice, al utilizar conocimiento privado de versiones altamente

La orientación opuesta que sigue el pensamiento de ambos filósofos se revela en el hecho de que parten originariamente de presupuestos distintos. Como ha señalado Belaval, el punto de partida de Descartes son las matemáticas y él busca determinar en qué basan su certeza los métodos de tal ciencia. Él “encuentra que es la intuición, y que esa intuición continua [*intuition continuée*] libera un orden de razones que no aparecía con la lógica común; su lógica es una matemática aplicada” (Belaval 1960, p. 38). Leibniz, por el contrario, “no parte de las matemáticas, él no llega a ellas sino bastante tarde, convencido de que el secreto de la certeza se encuentra en el formalismo de la Escuela: incluso no verá en las matemáticas más que una promoción de la Lógica” (*ibid.*).⁸ Leibniz, en oposición a Cartesio, no sólo permaneció siempre fiel, como matemático, a la gran tradición clásica, sino que para él la matemática era una rama de la lógica (*cf.* Cassirer 1943, p. 383). En efecto, se ha sostenido con razón que la idea más fecunda que Leibniz extrajo de sus estudios de lógica aristotélica fue la noción de prueba formal (*cf.* Kneale y Kneale 1962, p. 325). Para él, Aristóteles fue, de hecho, el primero que escribió matemáticamente fuera de las matemáticas (*cf.* GP VII 519),⁹ siendo la invención de la forma de los silogismos “una especie de *matemática universal* [*Mathematique universelle*]” (NE IV 17 § 4). En la medida en que “la ciencia depende de la demostración” (C 153), no es casual que las reglas tanto de la lógica aristotélica como

autorreferentes [*highly egotistical*] de Descartes sobre experiencias místicas en su juventud, crea visionarios [*makes visionaries*]” (Wilson 1989, p. 118).

⁸ Así se expresa el propio Leibniz en una especie de bosquejo autobiográfico que presenta a su amigo Remond: “Siendo niño estudié a Aristóteles e incluso los escolásticos no me desanimaban [...]. Es verdad que no penetré en lo más profundo [de las matemáticas] después de haber conversado con el Sr. Huygens en París” (carta a Remond, 14 de enero de 1714, GP III 606). De manera similar se explaya en una carta a la princesa Elizabeth: “En mis primeros años estaba bastante versado en las sutilezas de los tomistas y de los escotistas; al acabar mis estudios me entregué a la jurisprudencia, para la cual se requiere aprender también historia; pero los viajes me permitieron conocer grandes personajes, los cuales hicieron que me gustaran las matemáticas. Me entregué a ellas con una pasión casi desmesurada durante los cuatro años que permanecí en París, y ello con mayor éxito y aplauso del que hubiera podido esperar un aprendiz como yo, además de extranjero” (Leibniz 1989, p. 50). Véase también GP IV 478.

⁹ Carta a Gabriel Wagner fechada en 1696. “Hay ejemplos muy considerables —dice Teófilo en los *Nuevos ensayos*— de demostraciones fuera de las matemáticas, y se puede decir que ya Aristóteles nos proporcionó algunas en sus *Primeros Analíticos*” (NE IV 2 § 12). Según Weyl, la lógica aristotélica puede ser considerada como el producto de una abstracción proveniente de las matemáticas (*cf.* Weyl 1959, p. 3).

las de los géometras sean para Leibniz superiores a las reglas cartesianas. Sin embargo, el campo entero de la lógica tampoco se reduce por ello para el filósofo germano a la silogística aristotélica, sino que ésta representa sólo una pequeña fracción de aquélla. Como observa Cassirer, “en su ‘*Characteristica generalis*’ él había encontrado y estudiado tipos de argumentación y razonamiento completamente diferentes de aquellos contenidos en la lógica clásica” (Cassirer 1943, pp. 383–384). La lógica de Aristóteles simplemente descubrió el órgano; la tarea consiste ahora en llevarlo a su perfección. A diferencia de Descartes, la actitud crítica de Leibniz hacia la lógica clásica no es destructiva, sino perfecta.

Así, pues, la rigurosidad de la ciencia debe basarse en el carácter formal de sus demostraciones y argumentos, cuyo alcance no está limitado únicamente a las reglas válidas del silogismo, sino que se extiende también, por ejemplo, a las reglas usadas en las pruebas de la matemática vulgar, pues “el *verdadero método* [*vraye Methode*], considerado en toda su extensión —afirma el filósofo alemán—, es una cosa en mi opinión completamente desconocida hasta ahora, y no ha sido practicado más que en las matemáticas” (C 153).¹⁰ Toda demostración, todo argumento en general, debe concluir, en definitiva, por la fuerza de su forma.¹¹ Ahí radica en gran medida el meollo del método. La certeza,

¹⁰ Texto que corresponde al prefacio a la *Ciencia general*.

¹¹ Comenta Leibniz en su carta a Wagner que el trabajo realizado por Aristóteles es sólo un comienzo y el abecé (*das ABC*), pues existen otras formas más complejas y difíciles que sólo se pueden emplear después de establecer con su ayuda las formas primeras y más simples (*ersten und schwere Formen*), como por ejemplo las formas silogísticas euclidianas de prueba (*Euclidischen Schlussformen*). Incluso, continúa, “las adiciones, multiplicaciones o divisiones de los números, tal como se enseña en los colegios, son formas de prueba demostrativa [*Beweissformen*] (*argumenta in forma*) y se puede confiar en ellas, pues demuestran por la fuerza de su forma [*sie Krafft ihrer Form beweisen*]. Y así es posible decir que todas las cuentas de un contador concluyen por la forma y se fundan en *argumentis in forma*. Lo mismo ocurre con el álgebra y con otras demostraciones formales, escuetas y, sin embargo, completas” (GP VII 519). Véase Kneale y Kneale 1962, p. 325. En los *Nuevos ensayos* escribe Leibniz que “la lógica es tan apta para la demostración como la Geometría, y se puede decir que la lógica de los géometras, o la manera de argumentar de Euclides, tal y como las explicó y estableció respecto a proposiciones, son una extensión, o aplicación particular, de la lógica general” (NE IV 2 § 12). Abrazando tal opinión, no es de extrañar que Leibniz haya llevado a cabo diversos ensayos para aritmetizar la lógica aristotélica. Para un instructivo estudio sobre esta cuestión, véase Glashoff 2002. Pese a que Leibniz, como hemos dicho, siempre profesó una gran admiración por la lógica tradicional de Aristóteles y la de los escolásticos (*cfr.* Couturat 1901, p. 1), el reconocimiento de inferencias asilogísticas, de Leibniz en

el criterio de la verdad, no puede basarse en la evidencia psicológica, subjetiva, inmanejable e incommunicable, sino en las reglas formales que rigen la inferencia lógica en general, cuyo sitio fecundo de desarrollo y concreción se encuentra en el lenguaje escrito. Así, el lenguaje simbólico de las matemáticas tiene el privilegio y la fortuna de ser un lenguaje artificial dirigido *ad oculos*, esto es, se trata de un lenguaje que “habla” a la vista, en virtud de lo cual se puede convertir en el hilo visible que conduzca el razonamiento, permitiendo que el pensamiento salga de su interioridad al ser obligado, por así decir, a dejar huellas sensibles suyas en el papel. La potencia y el éxito de la matemática provienen, en parte importante, de la índole peculiar de su lenguaje simbólico, hecho en ningún caso ajeno al genio de Leipzig, reconocido e insigne constructor de notaciones matemáticas. En tal contexto adquiere plena importancia la creación de una buena *characteristica*, a fin de promover el avance y el rigor de la ciencia, del mismo modo que un adecuado sistema notacional puede incrementar notoriamente el poderío del *organon* matemático. Pues, en tanto que posiblemente no haya pensamiento ni razonamiento que pueda llevarse adelante sin alguna clase de signos (*cf.* GP VII 191), la característica nos proporcionaría un *filum meditandi mechanicum* que nos permitiría introducir y ejecutar el *calculus sive operatio per characteres* no sólo en las cantidades, sino en todo otro razonamiento (*cf.* GM IV 461–462). La característica general sería un nuevo instrumento (*humanum organi genus novum*) que aumentaría el poder de la mente mucho más que instrumentos como el microscopio o el telescopio han fortalecido los ojos, teniendo en cuenta que la razón es incluso superior a la vista (*cf.* GP VII 187). El simbolismo puede ser una herramienta epistémica sin par para el progreso del saber, por lo cual “una buena *characteristica* es una de las ayudas más grandes de que pueda disponer el espíritu humano” (NE IV 7 § 6). Por tal razón,

adelante —además de las formas silogísticas clásicas—, ha permitido el progreso de la lógica simbólica moderna (*cf.* Russell 1972, § 11; Lenzen 2004, p. 5). Por tal razón puede atribuirse a Leibniz, con toda justicia, el título de inventor de la lógica matemática. Así lo juzga Gödel: “Leibniz fue el primero en concebir la lógica matemática, y precisamente en este segundo sentido, en su *Characteristica universalis*, de la cual habría constituido una parte central. Pero su idea de un cálculo lógico realmente suficiente para abarcar los razonamientos de las ciencias exactas no fue llevada a la práctica hasta casi dos siglos después, por obra de Frege y Peano (aunque quizá no de la misma manera que Leibniz tenía en mente)” (Gödel 1944, p. 313). Una opinión similar es posible encontrar en Bochenski 1966, p. 291, y Tarski 1965, p. 19, n. 1.

si se pudieran encontrar caracteres o signos apropiados [*caracteres ou signes propres*] para expresar todos nuestros pensamientos tan nítida y exactamente como la aritmética expresa los números, o como el análisis geométrico expresa las líneas, se podría hacer en todas las materias, *en cuanto están sujetas al razonamiento*, todo lo que se puede hacer en Aritmética y en Geometría. (C 155)

Gracias a esos caracteres se podría fijar el razonamiento en general tal cual en matemáticas (*cf.* Couturat 1901, pp. 95–96; Iommi 1999–2000, pp. 98–101). De este modo, como certeramente señala Belaval,

la característica eliminaría el criterio psicológico y, por consiguiente, subjetivo, de la evidencia cartesiana [*l'évidence cartésienne*], al sustituirla por la manipulación de signos que representarían todos nuestros pensamientos para enseñárselos al prójimo, los fijarían en nosotros para que no los olvidemos más, abreviaría la expresión y permitiría así ordenar más fácilmente el conjunto de una meditación.¹²

§ 3. Además de subrayar la importancia de la prueba formal como elemento central del método y la necesidad de demostrar todos los axiomas secundarios o no primarios para afianzar el saber sobre bases monolíticas, es menester hacer mención, aunque sólo sea sucintamente, de la teoría leibniziana (lógica) de la verdad, a efectos de precisar aún más la posición de Leibniz respecto de la evidencia cartesiana. Me limito a señalar simplemente que Leibniz sustenta una teoría de la verdad que bien podríamos denominar concepción de la verdad como *contención* o *inherencia conceptual*, en la medida en que la verdad para él reside en la inhesión de los conceptos,¹³ documentada simbólicamente en el

¹² Belaval 1962, p. 84. Así se expresa Leibniz en una carta a Walter von Tschirnhaus, fechada en mayo de 1678 (*cf.* GM IV 460–461).

¹³ En los escritos leibnizianos existen innumerables pasajes para avalar esta tesis, de modo que me limito a ofrecer sólo uno, a modo de muestra: “Siempre, pues, el predicado o consecuente está incluido en el sujeto o antecedente [*praedicatum seu consequens inest subjecto seu antecedens*]; y en esto, precisamente, consiste la naturaleza de la verdad en general, es decir, la conexión entre los términos de la proposición [*natura veritatis in universum seu connexio inter terminos enuntiationis*], como ya observó Aristóteles. Y en las proposiciones idénticas esa conexión [*connexio*] y la inclusión del predicado en el sujeto [*comprehensio praedicati in subjecto*] es expresa [*expressa*]; en las demás, en cambio, implícita [*implicita*], y ha de ponerse de manifiesto por el análisis de las nociones [*per analysin notionum ostendenda*], en el cual estriba la demostración *a priori* [*demonstratio a priori*]” (C 518–519). Los estudiosos del filósofo alemán concuerdan en esto. Así Jolley: “Para Leibniz, la

enunciado.¹⁴ En virtud de la primacía tradicional que tiene la proposición de la forma ‘S es P’, que Leibniz continúa suscribiendo, él piensa esa concepción de la verdad como *Praedicatum inest subjecto*.¹⁵ Además, las verdades en general —según Leibniz— pueden ser divididas de acuerdo a una doble dicotomía:

- (i) Verdades de razón (*veritates rationis, vérités de raison ou a priori*) y verdades de hecho (*veritates facti, vérités de fait ou a posteriori*);
- (ii) Verdades demostrables y verdades indemostrables (*cfr. Demostración de las proposiciones primarias, A VI ii 479*).

De este modo, las verdades en general pueden ser clasificadas, a saber, en: (1) verdades de razón indemostrables, (2) verdades de razón demostrables, (3) verdades de hecho indemostrables, (4) verdades de hecho demostrables. Toda verdad indemostrable es primitiva y toda

verdad consiste no en una correspondencia entre proposiciones y estados de cosas [*a correspondence between propositions and states of affairs*], sino en una relación entre conceptos [*a relation between concepts*]” (Jolley 1993, p. 391). Y más recientemente Rauzy: “En fin, según una última concepción, ‘ Φ es verdadero’ significa que los conceptos que son designados en Φ por los nombres son entre ellos como Φ dice que son. ‘Todo hombre es mortal es verdadero’ significa que el concepto de hombre es una cierta relación [*une certaine liaison*] con el concepto de mortal. Esta manera de ver, que hace del predicado de verdad el nombre de una relación de conceptos o ideas [*un rapport de concepts ou d'idées*], es la que Leibniz ha adoptado principalmente. Pero no es propia de Leibniz. Se la puede encontrar igualmente, por ejemplo, en Malebranche” (Rauzy 2001, p. 22).

¹⁴ Es cierto que la expresión de la verdad depende de los caracteres o símbolos y de las definiciones empleadas en la formulación de las proposiciones verdaderas. Pero ello no menoscaba, a fin de cuentas, su naturaleza objetiva, de lo cual da testimonio la validez universal de las matemáticas, aun cuando alguna persona pueda alejarse a tal extremo del buen sentido que “se convenza a sí mismo de que la verdad es arbitraria y depende de los nombres, aunque, sin embargo, se sabe que la misma geometría pertenece a los griegos, latinos, germanos” (GP VII 191). Es el orden necesario, y no arbitrario, existente entre los signos y los objetos e, incluso, entre los diversos sistemas de símbolos, “el fundamento objetivo [*fondement objectif*], aunque desconocido, de toda verdad” (Couturat 1901, p. 105).

¹⁵ La versión más conocida de esta tesis se encuentra en el siguiente pasaje: “Verdadera es una proposición cuyo predicado está incluido en el sujeto [*praedicatum inest subjecto*], y así en toda proposición verdadera afirmativa, necesaria o contingente, universal o singular, la noción del predicado de algún modo está contenida en la noción del sujeto; de manera que quien comprendiese perfectamente ambas nociones del modo como las comprende Dios vería en ello claramente que el predicado está incluido en el sujeto [*praedicatum subjecto inesse*]” (C 16–7). Véase también DM § 8, GP IV 433.

verdad demostrable es derivada. Como se ve, esta cuádruple partición se genera de la intersección de un criterio epistemológico (según sea la razón o la experiencia la fuente de validez del conocimiento), por un lado, con uno lógico (lo que es susceptible de prueba formal), por otro lado. Aquí no se apela a ningún criterio psicológico, como acaece —según Leibniz— con la evidencia cartesiana.¹⁶ Esta clasificación de las verdades puede ser expuesta, a modo de resumen, en la siguiente tabla:¹⁷

	Verdades de hecho	Verdades de razón
Verdades indemostrables o primitivas	Inmediatas (Inmediación de sentimiento): <i>Cogito, varia a me cogitantur</i> Las primeras experiencias	Idénticas explícitas (Inmediación de ideas): $A = A$ Las primeras luces
Verdades demostrables o derivadas	Cuya resolución va al infinito (Conforme a la teoría leibniziana de la contingencia)	Idénticas virtuales Resolubles en idénticas explícitas

De lo indicado arriba se muestra —y esto es lo que nos interesa recalcar respecto de este punto— que Leibniz, al establecer una tipología general de las verdades basada en el significado primario de la verdad y situar dentro de ella el primer principio de los cartesianos —ocupando un “casillero” más en tal esquema—, relativiza por completo el criterio de la evidencia contenido en el *cogito* cartesiano y, de este modo, pone en entredicho la pretensión de Descartes de hacer de la evidencia irrefutable del *ego sum cogitans* la norma de toda verdad.

§ 4. El famoso pasaje de los *Nuevos ensayos* —glosado por pensadores de la talla de Frege y Poincaré— en el cual Teófilo, en representación de Leibniz, demuestra la fórmula aritmética elemental “ $2 + 2 = 4$ ”, es el siguiente:

Digo que os esperaba aquí bien preparado. Supuesto que *cuatro* significa tres y uno, el que dos y dos son cuatro no constituye una verdad completamente inmediata. Se la puede entonces demostrar y he aquí cómo:

¹⁶ Con todo, Leibniz también denomina verdades *inmediatas* a las verdades primitivas, por cuanto no requieren de prueba o demostración, y accedemos a su verdad directamente. La primera verdad de razón es el principio de contradicción o el principio de los idénticos (*cf.* GP IV 357). El *cogito* es, según Leibniz, la verdad primaria de hecho o *a posteriori*.

¹⁷ Este cuadro está basado en parte en el de Serres 1968, p. 139.

Definiciones:

- 1) *Dos*, es uno y uno.
- 2) *Tres*, es dos y uno.
- 3) *Cuatro*, es tres y uno.

Axioma: Poniendo cosas iguales una en lugar de la otra, la igualdad se mantiene.

Demostración:

2 y 2 es 2 y 1 y 1 (por la definición 1)	$2 + 2$
2 y 1 y 1 es 3 y 1 (por la definición 2)	$2 + \overbrace{1 + 1}$
3 y 1 es 4 (por la definición 3)	$\underbrace{3 + 1}$
	4

Entonces (por el axioma)

2 y 2 es 4. Lo que había que demostrar.

En lugar de decir que 2 y 2 es 2 y 1 y 1, podía haber puesto que 2 y 2 es igual a 2 y 1 y 1, y así con todo lo demás. Pero también se puede subentenderlo en todos los pasos, para hacerlo con más rapidez, y ello en virtud de otro axioma que lleva consigo que una cosa es igual a sí misma, o que lo que es lo mismo es igual. (NE IV 7 § 10)

Para una mejor inteligencia de este pasaje es necesario tener a la vista lo que dice Locke sobre el asunto en el pasaje respectivo del *Ensayo* y lo que enuncia Filaletes en los *Nuevos ensayos* en su nombre.

¿Qué principio —dice Locke— se requiere para probar que uno y uno son dos, que dos y dos son cuatro, que tres por dos son seis? Lo cual siendo conocido sin ninguna prueba, muestra que o todo conocimiento no depende de ciertas *praecognita* o máximas generales, llamadas principios; o bien que estos son principios: y si estos han de ser contados como principios, una gran parte de la numeración será así. (E IV 7 § 10)

Éste es un punto que no hay que perder de vista, ya que lo que aquí está en juego y en disputa es nada menos que el valor y la utilidad del método axiomático-deductivo, que Locke pone expresamente en entredicho al enfocar el problema del conocimiento casi exclusivamente en

términos de una evidencia vaga e imprecisa.¹⁸ De lo allí afirmado se sigue que o bien no hay que aceptar ningún principio o bien es menester admitir infinitos de ellos, en ambos casos en contra de la concepción axiomática tradicional del saber. Por lo demás, un poco antes de ese pasaje del *Ensayo*, Locke sostiene que las proposiciones aritméticas elementales no requieren prueba, por cuanto “siendo la igualdad de esas ideas tan visible y cierta [*visible and certain*] para él sin ése o cualquier otro axioma, no necesita ninguna prueba para percibirlo” (E IV 7 § 10). Siendo las máximas o axiomas proposiciones autoevidentes (*self-evident propositions*) (cfr. *ibid.*), proposiciones como “dos y dos son cuatro” son tan evidentes por sí mismas como algunos axiomas. Habiendo para él tres tipos de conocimiento: el intuitivo, el demostrativo y el sensitivo (cfr. NE IV 2 § 14), como es manifiesto por lo dicho, él considera que las proposiciones aritméticas elementales son conocidas de modo intuitivo. Y, desde luego, “el conocimiento intuitivo [*intuitive knowledge*] —nos dice Locke— no requiere ni admite ninguna prueba [*proof*], ninguna parte suya más que otra” (E IV 7 § 19).

Filaletes hace hincapié en el mismo punto también en los *Nuevos ensayos*.

Filaletes.— Nuestro hábil autor dice aquí: Me gustaría preguntar a los que pretenden que todo conocimiento (que no sea de hecho) depende de los principios generales innatos y evidentes por sí mismos, ¿de qué principio precisan para probar que *dos y dos es cuatro*? Porque se conoce (según él) la verdad de este tipo de proposiciones sin ayuda de ninguna prueba. ¿Qué decís al respecto? (NE IV 7 § 10)

La demostración de Leibniz, que viene justo a continuación de este pasaje, es funcional al propósito de refutar la opinión de Locke según la cual “ $2 + 2 = 4$ ” es una verdad completamente inmediata (*verité tout à fait immediate*), conocida por intuición, que no requiere por ello de prueba ni principios mediante los cuales ser probada. Puesto que para Leibniz sólo hay dos tipos de indemostrables, en los cuales se resuelve en última instancia toda demostración: “definiciones o ideas” y “proposiciones primitivas, que son idénticas” (cfr. GM VII 20), proposiciones como “ $2 + 2 = 4$ ” requieren de prueba en cuanto verdades de razón derivadas no primitivas. Tratándose de verdades de razón, debemos

¹⁸ En tal sentido, habría que tener probablemente más en cuenta la observación de Belaval: “En Locke, [Leibniz] ha descubierto, con toda razón, un lector de Descartes: a través de Locke —el examen atento de los textos lo demostraría—, los *Nuevos ensayos* buscan llegar al cartesianismo” (Belaval 1960, p. 147).

limitarnos (i) a la evidencia dada en la formación originaria de los conceptos, a través de la descomposición completa de las nociones, y (ii) a la evidencia de la identidad, cuando ésta es hecha explícita mediante la demostración formal, por medio de la transformación de las fórmulas, encadenando definiciones, al sustituir unos términos por otros. Y este procedimiento es legitimado por el axioma introducido por Teófilo: “Poniendo cosas iguales una en lugar de la otra, la igualdad se mantiene”, que no es sino expresión de la ley de Leibniz: *eadem sunt quorum unum potest substitui alteri salva veritate*, aplicada al caso de los números, donde lo que se preserva propiamente es la igualdad (de magnitudes).

§ 5. Quizá éste sea el momento adecuado para dirigir nuestra atención a los comentarios de Frege y Poincaré sobre la demostración leibniziana. Me limitaré sólo a tratar algunos puntos significativos para nuestra discusión. Ninguno de ellos reproduce textualmente el pasaje de Leibniz, aunque ambos introducen modificaciones en él. Poincaré considera irrefutable el carácter puramente analítico de la prueba leibniziana (*cfr.* Poincaré 1927, p. 12). Y en ello justamente estriba su debilidad, considera él, en la medida en que la de Leibniz no es una demostración (*démonstration*) propiamente dicha, sino una verificación (*vérification*) (*cfr.* pp. 12–13). Pero ¿qué quiere decir Poincaré con esta contraposición?

La verificación difiere precisamente de la verdadera demostración [véritable démonstration], porque ella es puramente analítica y porque ella es estéril. Es estéril porque la conclusión no es sino la traducción de las premisas a un lenguaje distinto. La demostración verdadera es fecunda al contrario porque la conclusión tiene un sentido más general que las premisas. (Poincaré 1927, p. 13)

En efecto, limitar la matemática a tal proceder —afirma Poincaré— es no hacer de ella una ciencia, ya que “no hay ciencia sino de lo general” (*ibid.*). La fecundidad de la demostración matemática ha de residir en la generalidad de la conclusión respecto de las premisas, cuyo fundamento reside en lo que Poincaré denomina el principio de inducción completa. Esa generalidad es exactamente lo que se echa en falta en la prueba leibniziana, al no consistir sino en la ejecución de meras transposiciones lingüísticas, de modo que, al fin y al cabo, cada paso de tal demostración no diría más que lo mismo de otro modo. ¡Pero eso es precisamente lo que Leibniz quiere *mostrar*, en cierto sentido, con su demostración! Por eso, Teófilo replicaría seguramente a Poincaré: “Parecís haber olvidado cómo os hice ver más de una vez que decir *uno* y

dos son tres no es más que la definición del término *tres*, de manera que decir que uno y dos es *igual a tres*, es decir que una cosa es igual a sí misma” (NE IV 7 § 10). En este pasaje Leibniz muestra, es cierto, que es posible transitar de la *identidad* afirmada en la definición a la *igualdad* de las expresiones contenidas en ella. Pero lo que hay que destacar es que en la definición está puesta la identidad o la igualdad de una cosa consigo misma, como termina aseverando el pasaje citado, o, dicho en otros términos, ambos lados de la igualdad definicional (“ $3 =_{\text{def}} 2 + 1$ ”) refieren a lo mismo o son modos simbólicamente diferentes de expresar lo mismo. En la medida en que “toda definición proporciona una regla de sustitución” —y justamente reside ahí, “según la doctrina constante de Leibniz, la función esencial de la definición en la demostración” (Fichant 1994, p. 180)—, gran parte del peso de la demostración leibniziana recae en las definiciones mismas de los números que él proporciona en ella, puesto que el fundamento de la igualdad se basa en que ambas expresiones simbólicas, distintas entre sí, se refieren a una y la misma cosa, al ser descripciones formales diferentes del mismo número. El tercer término que oficia aquí, por decirlo así, de “pivote” es la identidad de referencia que se encuentra en la base de las definiciones, designado por el *es*. Así, por ejemplo, cuando se presenta la definición “dos es uno y uno” lo que se hace no es sino afirmar que la esencia de dos es ser esa determinada multitud de unidades. Ahora bien, como sostiene Leibniz:

para distinguir mejor la esencia de la definición hay que considerar que de la cosa no existe más que una esencia, y, sin embargo, hay varias definiciones que expresan una misma esencia, al modo en que una misma estructura o una misma ciudad pueden ser representadas por diferentes escenografías, según los diferentes lados desde los cuales se la mire. (NE III 3 § 15)

Con todo, los términos de la definición tienen un orden irreversible que expresa las relaciones necesarias existentes entre los conceptos. Eso hace que la “identidad definicional” no sea simétrica. En efecto, como apunta Fichant, “en el enunciado definicional mismo, las expresiones identificadas no son permutables: ‘2’ no podría en ningún caso valer como la definición ‘1 + 1’, porque hay un orden de ideas, donde ‘1 + 1’ exhibe las nociones primitivas y su ley de composición” (*op. cit.*, p. 182). En las definiciones en cuanto tales, por lo tanto, no está permitido intercambiar el *definiendum* por el *definiens*, lo cual deja entrever que las “meras” transposiciones lingüísticas siguen reglas bien determinadas que reflejan un *fundamentum in re*.

Por lo demás, me parece que Leibniz es plenamente consciente de que las proposiciones aritméticas entrañan en sí mismas su propia verificación o comprobación mediante la ejecución de un cálculo, como muestra el siguiente pasaje.

Ahora bien, cuál sea la razón por la cual el arte de demostrar no se encuentra más que en las matemáticas, no ha sido penetrada hasta ahora, porque si se hubiese conocido la causa del mal, hace mucho tiempo que se hubiera encontrado también el remedio. Esta razón es que *las matemáticas llevan su prueba consigo*: porque cuando se me presenta un teorema falso, no tengo necesidad de examinarlo ni siquiera de saber la demostración, puesto que descubriría la falsedad *a posteriori* por una *experiencia fácil*, que no cuesta nada sino la tinta y el papel, es decir, por *el cálculo*. (C 154; las cursivas son mías.)

El cálculo (*calcul*) es considerado aquí como una “prueba” *a posteriori*, por cuanto se trata de una experiencia fácil (*expérience aisée*) (cfr. Iommi 1999–2000, pp. 98–99). En cuanto comprobación o verificación, tal cálculo no es propiamente una demostración, aunque la posibilidad siempre presente de realizarlo pone de manifiesto uno de los motivos más importantes del éxito de la matemática, a saber: que esta ciencia, a diferencia de disciplinas como la metafísica, “aporta sus propios controles y comprobaciones” (cfr. GP IV 469). Ahora bien, verificar los razonamientos mediante experiencias (*verifier les raisonnements par les expériences*) no sería más que la exhibición del principio general “encarnado” en ellas o su expresión *ectética*. “Es verdad y ya he observado —dice Leibniz en los *Nuevos ensayos*— que es tan evidente [*evident*] decir *ectéticamente* [*ecthétiquement*] en particular A es A , que decir en general, *se es lo que se es* [*on est ce qu'on est*]” (NE IV 7 § 2). La ciencia ciertamente aspira siempre a la generalidad de sus enunciados, aunque el principio expresado formalmente con toda generalidad tiene la misma evidencia que una verdad particular (una identidad) en la que tal principio está incardinado. Esto es justamente lo que afirma el filósofo germano en un pasaje de los *Nouveaux Essais*:

Por lo que respecta al axioma de Euclides [“si quitamos cosas iguales de cosas iguales el resto sigue siendo igual”], aplicado a los dedos de la mano, os concedo que es igual de fácil concebir lo que decís sobre los dedos que verlo en A y B ; pero para no hacer constantemente lo mismo, lo representamos en general, y a partir de ahí basta con hacer las subsunciones. De lo contrario, es como si se prefiriera el cálculo con números particulares [*le calcul en nombres particuliers*] en lugar de con reglas universales

[*regles universelles*]; lo cual sería obtener menos de lo que se puede. (NE IV 7 § 6)

En este sentido, Leibniz distingue un álgebra numérica (*Algebre numerique*) y un álgebra especiosa (*Algebre specieuse*) (cfr. NE IV 7 § 6). La primera trabaja sólo con numerales, cifras o figuras gráficas para representar números; la segunda opera también con letras. La mayor utilidad de esta última es la generalidad mayor que es posible alcanzar con ella. Por lo demás, como hace ver el pensador teutón, es una simple convención tomar las figuras numerales como números particulares, por cuanto bien pueden ser ellas mismas consideradas de manera general tal como sucede con las letras (cfr. Couturat 1901, pp. 480–482).¹⁹ En alguna medida, el álgebra numérica (o aritmética) es expresión *ectética* de un álgebra más general, que está “corporizada” y yace virtualmente en la primera, esperando, por así decir, su actualización para adoptar una forma explícita. O, dicho de otro modo: el álgebra numérica expresa *ectéticamente* lo que el álgebra especiosa expresa general o universalmente.

Ahora dirijamos nuestra atención a la crítica de Frege. Los enunciados aritméticos para Frege tienen una naturaleza analítica —no sintética *a priori*, como pretendía Kant— y por ello la aritmética puede ser reducida a la lógica. En efecto, la aritmética es tan sólo una lógica más extensamente desarrollada (*eine weiter ausgebildete Logik*) y cada enunciado aritmético es una ley lógica, aunque deducida de otras primitivas (cfr. Frege 1884, § 87). Como se puede observar, en oposición a la opinión hostil de Poincaré hacia el planteamiento leibniziano, existe una coincidencia total entre los dos autores germanos respecto de la necesidad de demostrar las proposiciones numéricas de una manera lógicamente rigurosa. Tal exigencia (*Forderung*) constituye ciertamente una demanda de la matemática misma, puesto que, como escribe Frege,

las proposiciones fundamentales de la aritmética [*Grundsätze der Arithmetik*] deben ser probadas, si ello fuera posible, con el mayor rigor; así, sólo cuando se haya eliminado todo hueco en la cadena deductiva podrá decirse con seguridad de qué verdades primitivas [*Urwahrheiten*] depende la prueba. (Frege 1884, § 4)

¹⁹ Como dice bien Couturat, “la ventaja de los números por sobre las letras es que, en primer lugar, son en provisión indefinida [*en provision indéfinie*]; después, que ellos son más apropiados que las letras para marcar el orden, y que ellos son susceptibles de órdenes variados y de arreglos complejos” (Couturat 1901, p. 481).

De este modo, el carácter analítico de la demostración leibniziana es para Frege —a diferencia de Poincaré—, precisamente, su mayor virtud. Por lo demás, poner de manifiesto que las fórmulas numéricas son verdades analíticas y *a priori* —ya que sólo dependen de definiciones y leyes lógicas generales, que no pueden ni necesitan ser demostradas (cfr. Frege 1884, § 3)— no es ciertamente una tarea menor si se tiene en cuenta el impresionante desarrollo de los estudios aritméticos y sus múltiples aplicaciones, lo cual ya no permite sostener, desde luego, “el menosprecio, tan ampliamente difundido, hacia los juicios analíticos y el cuento de la esterilidad de la lógica pura [*Märchen von der Unfruchtbarkeit der reinen Logik*]” (Frege 1884, § 17). Ahora bien, Frege, con Kant, denomina fórmulas numéricas (*Zahlformeln*) a enunciados como “ $7 + 5 = 12$ ” o “ $2 + 3 = 5$ ”, las cuales conviene distinguir expresamente de las leyes generales que son válidas para todos los números enteros, tales como la de asociación o la de conmutatividad (cfr. Frege 1884, § 5). Y es en este punto donde, a pesar de la coincidencia casi total existente entre Leibniz y Frege, este último encuentra una laguna en la prueba leibniziana, a saber: no haber justificado explícitamente el tránsito entre “ $2 + (1 + 1)$ ” y “ $(2 + 1) + 1$ ”, fundado en la ley de asociatividad para la adición, la cual reza de la siguiente manera:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

En efecto, esta ley no está contenida en las definiciones y los axiomas enunciados por Leibniz (cfr. NE IV 7 § 10), de modo que él debió haber justificado explícitamente ese paso, pues, según Frege, Leibniz apela a esa ley tácitamente (cfr. Cobb-Stevens 2006, p. 93). Presuponiendo esta ley, dice Frege, se ve fácilmente que se puede probar de esta manera cualquier fórmula para añadir la unidad a la unidad (*Einsundein*) (cfr. Frege 1884, § 6). Ésta sería, en consecuencia, la gran deficiencia de la prueba que Leibniz suministra, y Frege proporciona su propia versión que, a su entender, la subsana satisfactoriamente. Desde un punto de vista estrictamente formal, la crítica fregeana parece ser completamente pertinente. La demostración —como Leibniz sin duda suscribiría— debe ser una cadena unitaria e ininterrumpida de proposiciones lógicas ensambladas unas con otras sobre la base de leyes lógicas y definiciones. Cualquier grieta en el encadenamiento de las verdades amenaza con destruir el valor de la prueba formal, pues, como señala Frege, la demostración no tiene solamente el propósito de establecer la verdad de una proposición más allá de toda duda, sino también el de proporcionar una comprensión (*Einsicht*) de la dependencia de las verdades

entre sí (cfr: Frege 1884, § 2). He aquí la relevancia para la fundamentación de la aritmética del *lapsus* que Frege cree detectar en la cadena del razonamiento de Leibniz, cuando éste transita injustificadamente, en su opinión, de “ $2 + (1 + 1)$ ” a “ $(2 + 1) + 1$ ”, sin fundamentar tal paso en la ley de asociatividad para la adición. Así y todo, la observación de Frege parece deberse más a un malentendido de su parte con respecto al propósito específico que Leibniz persigue en el referido pasaje de los *Nuevos ensayos*, pues, en lugar de desarrollar una demostración absolutamente completa, con perfecto rigor formal, el filósofo de Leipzig se propone fundamentalmente socavar la posición de Locke, según la cual las fórmulas numéricas son evidentes de suyo y no requieren por ello de prueba alguna, poniendo simplemente en evidencia la falta de fundamento de tal posición. La prueba leibniziana parece asemejarse, en tal sentido, a un atajo, a una demostración abreviada, en la cual se omite, por razones de economía y tiempo, colocar absolutamente todos los axiomas empleados, como acontece habitualmente, por lo demás, en el conocimiento humano, según la doctrina leibniziana constante del pensamiento ciego o simbólico. Esto permitiría explicar el hecho de que Leibniz no explicita, como es debido, la ley de asociatividad para la adición. Además, y en concordancia con lo anterior, Frege parece no entender del todo el significado del simbolismo empleado por Leibniz en tal ocasión. Como sugiere una lectura atenta de la prueba leibniziana, las llaves que Leibniz introduce en su demostración expresan *ectéticamente* la asociatividad de la adición, haciendo uso de ella “operativamente”, sin enunciarla formal y expresamente, con lo cual, entonces, la cuestión radica en determinar por qué Leibniz ha creído poder eximirse de formular explícitamente tal regla.

Así, asumiendo y explicitando la ley de asociatividad para la adición, es posible demostrar cualquier fórmula numérica, definiendo, como lo hace Leibniz, cada número a partir del precedente. En efecto, como escribe Frege:

no veo cómo nos podría ser dado más adecuadamente un número como 437986 más que de la manera leibniziana. Así, incluso sin tener una representación [*Vorstellung*] de él, conseguimos tenerlo, sin embargo, en nuestro poder [*Gewalt*]. El conjunto infinito de los números, a través de tales definiciones, es reducido al uno y al aumento en uno, y cualquiera de las infinitamente muchas fórmulas numéricas puede ser probada a partir de algunas proposiciones generales. (Frege 1884, § 6)

De este modo, como lo hace notar Poincaré también, de acuerdo a las definiciones que Leibniz provee de los números enteros o naturales dos,

tres y cuatro, se colige que el pensador alemán es de la opinión de que la definición de un natural cualquiera —suponiendo la definición de “1” y la función u operador sucesor $f(n) = n + 1$ — está dada por $n' = f(n) = n + 1$, donde n' se llama el sucesor de n , de modo tal que los naturales se generan o definen del siguiente modo: $2 = f(1) = 1 + 1$; $3 = f(2) = 2 + 1$; $4 = f(3) = 3 + 1$, y así sucesivamente.²⁰ Éstas son, según el pensador germano, las definiciones más simples de los números (cfr. NE IV 2 § 1). Ahora bien, puntualiza Leibniz:

Es verdad que en ello [*i.e.*, en las definiciones más simples de los números] hay un enunciado implícito [*une énonciation cachée*], que ya he hecho notar, a saber que dichas ideas son posibles: y esto se conoce aquí *intuitivamente*, de manera que se puede decir que en las definiciones hay incluido un conocimiento intuitivo cuando su posibilidad aparece desde el primer momento. De este modo, todas las definiciones adecuadas incluyen verdades primitivas de razón, y, por tanto, conocimientos intuitivos. (NE IV 2 § 1)

En efecto, decir, por ejemplo, que “uno y uno es dos” tiene, desde luego, “de verdadero y evidente el hecho de que es la definición de una cosa posible” (NE IV 7 § 6), y lo que se conoce intuitivamente es la posibilidad de aquello que es mentado en la definición. Por consiguiente, las definiciones más simples de los números revelan que la identidad contenida en ellas no consiste en una identidad formal o nominal, entendiendo por tal una identidad vacía de contenido (lo definido en la definición), puesto que, como indica Fichant, tal identidad

depende de una concepción de la aritmética elemental que se podría caracterizar de “contentual” [*contentuelle*] (*inhaltlich*), en el sentido en que se la entiende por oposición al formalismo: es decir, que las expresiones allí son referidas a un contenido de pensamiento, contenido comprobado por añadidura para Leibniz en una intuición irreductible. (Fichant 1994, p. 183)

§ 6. Tanto Frege como Poincaré concuerdan en el carácter meramente analítico de la prueba leibniziana. Y ello es así por cuanto Leibniz efectivamente defiende una teoría analítica del razonamiento matemático (cfr. Belaval 1960, p. 138). Con todo, de ello parecería seguirse, a primera vista, que Leibniz, conforme a todo lo que hemos señalado, suscribiría un formalismo puro, una concepción de la prueba como

²⁰ Asumiendo $n' > 1$ y $n \neq n'$. Todo natural tiene un sucesor y ese sucesor se define por esa función $f(n) = n + 1$.

mera manipulación de símbolos vacíos. Sin embargo, si se presta mayor atención, se verá lo errado de esta apreciación. Ante todo, Leibniz parte de una concepción de la lógica distinta de la que parten autores como Frege y Russell, de modo que el “logicismo” que Leibniz promueve no puede sin más ser equiparado con el de estos autores sin ulteriores clarificaciones. Es verdad que para Leibniz el formalismo matemático no es más que una promoción del formalismo de la Escuela, siendo aquél expresión limitada e imperfecta de éste. Es cierto también que él busca reducir en cierto modo la matemática a la lógica, pero la lógica para él no puede nivelarse a nuestra lógica extensional de relaciones. A pesar de haber realizado algunos desarrollos de la predicación desde un punto de vista “extensionalista” proponiendo una relación entre individuos y conjuntos o entre conjuntos, Leibniz, fiel a la tradición, abraza finalmente una interpretación “intensionalista” de la predicación (*cfr.* Nuchelmans 1998, pp. 121–122). Esta sola indicación debiese bastar para no incurrir en la equivocación de atribuir apresuradamente a Leibniz —por simple homonimia— un formalismo à la Hilbert, ajeno por completo a su horizonte intelectual y a su peculiar proyecto “formalizador”.

Puesto que “el principio aquel, tantas veces repetido hasta la saciedad [*toties decantatum*]: *todo lo que percibo clara y distintamente es verdadero*, poco nos hace avanzar mientras no se exhiban criterios suficientes [*satis criteria*] de lo claro y lo distinto” (GP VII 337), en la doctrina estándar de las *Meditaciones sobre el conocimiento, la verdad y las ideas*, de 1684, Leibniz presenta normas formales que, a su juicio, permiten hacer controlable y utilizable en alguna medida aquel precepto cartesiano. En efecto, según ese escrito, el conocimiento distinto —que es el que nos importa aquí— es caracterizado, por un lado, como inadecuado y adecuado, y también, por otro lado, como ciego e intuitivo (*cfr.* A VI iv 585–586; GP IV 422). Un conocimiento es adecuado cuando por análisis se conoce distintamente no sólo la noción compleja, sino también los ingredientes constituyentes primitivos de ella o sus *requisita* (*cfr.* NE II 31 § 1). Podemos llegar a conocer *a priori* la posibilidad de la noción al constatar que todas sus notas son compatibles entre sí. Es verdad que, en su mayor parte, el conocimiento humano es ciego o sordo, por cuanto se piensa en los símbolos en lugar de en las notas que componen una noción, pero si podemos lograr pensar *simul* en todas las nociones que integran tal noción, el conocimiento se llama intuitivo. Sólo el conocimiento de los números parece acercarse lo más posible al conocimiento adecuado (*cfr.* GP IV 423; NE II 31 § 1). Ahora bien, si, como afirma Leibniz en una carta a Bourguet, “la noción de los números es resoluble al final en la noción de la unidad que ya no es

resoluble, y que se puede considerar como el número primitivo [*nombre primitif*]” (GP III 582), es acertado sostener, como lo hace Fichant, que

la definición de un número entero como reunión o agregado de unidades justifica bien el proceso constructivo o genético que constituye la noción singular de cada número; la compatibilidad de los elementos compuestos es aquí evidente, puesto que no se trata de nada más que de la repetición de la noción irresoluble de la unidad, donde la posibilidad del objeto de pensamiento está garantizada en una intuición efectiva. (Fichant 1994, p. 184)

En efecto, de acuerdo a tal planteamiento, al poner la definición misma se introduce *simul, téticamente*, la posibilidad de lo definido, de manera que al sustituir en el *definiendum* “dos y uno” el término resoluble “dos” que aún contiene, se culmina el análisis con “el agregado ‘uno y uno y uno’, donde no figura más que el ‘número primitivo’, y cuyo contenido objetivo adecuadamente conocido es dado a la intuición de una pluralidad reducida a sus elementos simples” (*ibid.*). Si las esencias de los números naturales son expresadas por las definiciones más simples de ellos, entonces lo que se conoce intuitivamente es una esencia, la esencia del número como agregado de unidades.²¹ Alcanzado este punto, me limito a sugerir que tal vez el problema realmente acuciante, desde un punto de vista filosófico, sea preguntarse cómo es que podemos llegar a esas definiciones más simples de los números. Y es precisamente en este lugar donde se sitúa —a mi entender— el punto de partida de la reflexión crítico-trascendental de Kant sobre los números (*Zahlen*), a saber: no partiendo de la definición del concepto de número —tal como lo hace Leibniz—, el cual posiblemente sea indefinible en sí mismo, sino investigando su origen, rastreándolo en la generación originaria de los números naturales como adición sucesiva y ordenada de una unidad a otra (estableciendo, así, de paso, una primacía del aspecto ordinal del concepto de número, por sobre el cardinal), o, lo que es lo mismo, indagando cómo es que el número se presenta originariamente a la conciencia trascendental cognoscente mediante sus actos primarios de construcción, que es lo que Leibniz deja entrever sin tematizar, cuando dice que en la posición de la definición más simple del número se

²¹ “Es la esencia del número la que se aprehende intuitivamente. A partir de ahí podemos observar cómo de tal esencia salen propiedades lógicas tales como las expresadas en las fórmulas numéricas. De la esencia de senario, a saber: $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, derivan propiedades como: $6 = 3 + 3 = 3 \cdot 2 = 12 \div 2 = 4 + 2$, etc., que son expresiones de la misma esencia” (Belaval 1962, p. 95).

afirma *eo ipso* la posibilidad de lo definido, esto es, del número mismo. Por ello son *reales* tales definiciones, que son las más simples posibles, por cuanto asistimos, si se quiere, al acto mismo de construcción de lo definido, documentado y afianzado simbólicamente a través de una cadena sucesiva de definiciones.

§ 7. En lugar de la evidencia cartesiana hipertrofiada, que introduce innecesariamente elementos psicológicos y, por lo tanto, subjetivos, Leibniz piensa que las únicas evidencias que deben admitirse en la prueba formal son la evidencia de la identidad —en cuanto adecuación inmediata y explícita de las ideas— y la dada en la libre formación originaria de los conceptos (*Begriffsgestaltung*),²² tal como acontece en la generación de los números naturales expresados como agregados o multitudes de unidades. Se trata en este caso, entonces, por decirlo así, de una evidencia formal, en la medida en que tal evidencia reside en la estructura formal del razonamiento y es exigida por ella. Sin embargo, pese a lo que pueda parecer *prima facie*, Leibniz no se inclina por un formalismo vacío en el cual los signos no tengan ninguna referencia a contenidos lógico-ideales, sin ninguna vinculación con las relaciones objetivas entre los conceptos, por cuanto —huelga decirlo— su característica es una característica *real* (*Caractéristique réelle*) (cfr. Cassirer 1910, p. 44). Pese a que para él la prueba es conducida de manera estrictamente analítica, el conocimiento intuitivo tiene un lugar en ella, sólo que acotado a un momento bien determinado. No se trata de una *intuitus* omnipresente desplegada arbitrariamente por todas partes, sino que se trata de un ingrediente que culmina el proceso de la ciencia, en un contexto en el cual el conocimiento humano se asume como esencialmente ciego o simbólico, pues, como dice Leibniz, “si hubiera que reducir todo a los conocimientos intuitivos, las demostraciones serían casi siempre de una insuperable prolijidad” (NE IV 2 § 8). En efecto, como se ve en la manipulación de las expresiones simbólicas o fórmulas, mediante la sustitución de unas definiciones por otras, el pensamiento ciego, cuando es llevado a cabo correctamente, se ajusta a la forma y en tal sentido posee una evidencia formal (sintáctica) irrefutable. Con todo, las conclusiones a las que llega tal modo de pensar son tan sólo hipotéticas, no demostrativas como exige la ciencia,²³ por cuanto es la intuición

²² Ésta es una capacidad primaria fundamental (*erste Grundvermögen*) que, según Cassirer, Leibniz llamaría intuición (*Intuition*), junto con Spinoza (cfr. Cassirer 1999, p. 102).

²³ Belaval dice que “nuestro pensamiento puede, sin perder esta evidencia, permanecer ciego o simbólico [*aveugle ou symbolique*]. Es suficiente aceptar los térmi-

de la posibilidad de lo definido en las definiciones empleadas en la demostración lo que permite hacer ese tránsito desde lo meramente hipotético a lo enteramente apodíctico, como Leibniz muestra una y otra vez cuando se refiere al argumento ontológico para demostrar la existencia de Dios.²⁴ De esta forma, la *intuitus* constituye, por así decir, el punto de contacto entre la *via idearum* y la *via symbolorum* que asegura la objetividad del saber y que lo ancla a *parte rei*. El modelo axiomático-formalizante del saber, que procede teniendo como ideal la “deducción pura por símbolos”, es la vía que Leibniz concibe para que el conocimiento humano se eleve progresiva y asintóticamente a un estado lo más próximo posible de ciencia perfecta (*scientia perfecta*) (cfr. Cassirer 1971, p. 81). Por lo tanto, la prueba o demostración para Leibniz no se funda ni en la evidencia cartesiana ni en el puro formalismo, sino en el reconocimiento —como indica Fichant— de “la parte original de la intuición de un contenido que todo paso formalizante siempre supone, mientras fija con atención los contornos y el nivel de legitimidad” (Fichant 1994, p. 183). En consecuencia, el impulso formalizador leibniziano es —en este sentido— metodológico, y en ningún caso dogmático ni acríctico.

Esta promoción metodológica de la formalización busca sacar al pensamiento, por decirlo así, de su “taller interior” para obligarlo a externalizarse y objetivarse de manera tal que sea “apresado” por el signo sensible y así pueda ser accesible a todos, quedando siempre disponible. En el *labyrinthus scientiae* se requieren orientaciones confiables, gestos operacionales externos, procedimientos epistémicos estandarizados, o al menos alguna clase de indicaciones formales y estables, que sean universalmente comunicables a todos los hombres, de modo tal que los individuos puedan avanzar por el camino tortuoso del saber, apropiándose de lo conseguido por otros a la par que contribuyendo con lo que ellos mismos han logrado conocer, y, de este modo, pueda llegar a constituirse algo así como un conocimiento humano, un saber de la humanidad, y no simplemente una abigarrada nebulosa de experiencias psicológicas aisladas y privadas, cuya unidad y significado sólo

nos hipotéticamente. La prueba se hará por la demostración *ex concessis*, que reduce al absurdo la hipótesis contradictoria. La demostración no necesita, insiste Leibniz, sino los principios reflexivos, indirectos o formales” (Belaval 1960, p. 159).

²⁴ En este sentido, se haría bien en considerar la crítica leibniziana al argumento ontológico en su versión cartesiana —y la consecuente reformulación de la misma demostración— también conforme a la intención estrictamente metodológica que el autor quiere darle y reenfocar su examen teniendo en vista el alcance general que ella entraña para la concepción de Leibniz sobre la prueba en general.

tenga sentido propiamente para el sujeto cognoscente individual al que respectivamente pertenezcan. Se precisa, entonces, un *filum Ariadnes* común, que todo el mundo pueda en principio entender y seguir. Expresar el pensamiento en un sistema adecuado de símbolos permitiría progresar en esa dirección, afianzando el conocimiento, consolidándolo de alguna manera en un todo supraindividual, haciéndolo así disponible a todos los hombres, minimizando tendencialmente todo elemento arbitrario y subjetivo, como lo exige la ciencia en cuanto empresa mancomunada y cooperativa de la humanidad. En virtud de ello sería posible generar algo así como un sujeto epistémico colectivo del saber humano en su conjunto, lo cual no sólo ayudaría a la comunicación, difusión y apropiación colectiva del saber, sino también a su despliegue eficiente, ordenado y acumulativo. La prueba formal y la característica universal apuntan en esa dirección, como un proyecto utópico quizás en cuanto a la ambición y la extensión de sus resultados esperados, pero, en cuanto al propósito último perseguido, el programa leibniziano aspira esencialmente, a fin de cuentas, a cimentar, sobre bases realmente sólidas, las vías que hay que transitar si de verdad se quiere alcanzar el progreso del género humano en el campo del saber.²⁵

BIBLIOGRAFÍA

I. Fuentes y traducciones

R. DESCARTES

AT *Œuvres de Descartes*, ed. Charles Adam y Paul Tannery, 12 vols., Librairie Philosophique J. Vrin, París, 1973.

G.W. LEIBNIZ

A *G.W. Leibniz: Sämtliche Schriften und Briefe*, ed. Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Akademie Verlag, Berlín, 1970–2006.

C *Opusculs et fragments inédits de Leibniz: extraits des manuscrits de la Bibliothèque royale de Hanovre*, ed. Louis Couturat, Olms, Hildesheim, 1961.

²⁵ Una versión preliminar abreviada de este escrito, bajo el título “Demostración leibniziana de las proposiciones aritméticas elementales”, fue leída el 3 de noviembre de 2007, en las IV Jornadas Internacionales de la Sociedad Española Leibniz, “Leibniz entre la génesis y la crisis de la modernidad”, organizadas por la Sociedad Española Leibniz (SEL) y el Departamento de Filosofía II-Universidad de Granada, que tuvieron lugar en la Universidad de Granada, Granada (España), los días 1, 2 y 3 de noviembre de 2007. Agradezco al doctor Alejandro G. Vigo por sus valiosas observaciones y sugerencias que han contribuido a mejorar la calidad de este trabajo, así como a los árbitros que han evaluado el presente artículo por sus muy atinadas y pertinentes observaciones.

- GP *Die philosophische Schriften*, 7 vols., ed. C.I. Gerhardt, Olms, Hildesheim, 1961.
- GM *Die mathematische Schriften*, 7 vols., ed. C.I. Gerhardt, Olms, Hildesheim, 1971.
- DM *Discurso de Metafísica*, en GP IV 427–462.
- NE *Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano*, trad. J. Echeverría, Alianza, Madrid, 1992.

J. LOCKE

- E *An Essay Concerning Human Understanding*, Dover, Nueva York, 1959.

II. Bibliografía secundaria

- Beck, L.J., 1952, *The Method of Descartes: A Study of the Regulae*, Oxford University Press, Londres.
- Beck, L.W., 1993, “From Leibniz to Kant”, en R.C. Solomon y K.M. Higgins, *Routledge History of Philosophy*, vol. VI: *The Age of German Idealism*, Routledge, Londres/Nueva York, pp. 5–39.
- Belaval, Y., 1962, *Leibniz: Initiation à sa philosophie*, Librairie Philosophique J. Vrin, París.
- , 1960, *Leibniz critique de Descartes*, Gallimard, París.
- Bochenski, I.M., 1966, *Historia de la lógica formal*, trad. Millán Bravo Lozano, Gredos, Madrid.
- Cassirer, E., 1999, *Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit (zweiter Band)*, en *Gesammelte Werke*, Hamburger Ausgabe, vol. 3, Meiner, Hamburgo.
- , 1971, *Filosofía de las formas simbólicas*, vol. 1, trad. Armando Morones, Fondo de Cultura Económica, México.
- , 1943, “Newton and Leibniz”, *The Philosophical Review*, vol. 52, no. 4, pp. 366–391.
- , 1910, *Sustanzbegriff und Funktionsbegriff: Untersuchungen über die Grundfragen der Erkenntniskritik*, en *Gesammelte Werke*, Hamburger Ausgabe, vol. 6, Meiner, Hamburgo, 2000.
- Cobb-Stevens, R., 2006, “L’Imagination et les mathématiques”, en M. Fichant y J.-L. Marion (comps.), *Descartes en Kant*, Presses Universitaires de France, París, pp. 79–95.
- Couturat, L., 1901, *La Logique de Leibniz d’après des documents inédits*, Georg Olms, Hildesheim, 1961.
- Fichant, M., 1998, *Science et Métaphysique dans Descartes et Leibniz*, Presses Universitaires de France, París.
- , 1994, “Les Axiomes de l’identité et la démonstration des formules arithmétiques: $2 + 2 = 4$ ”, *Revue Internationale de Philosophie*, vol. 48, no. 188, pp. 175–211.
- Frege, G., 1884, *Die Grundlagen der Arithmetik: Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Meiner, Hamburgo, 1988.

- Garber, D., 1992, *Descartes' Metaphysical Physics*, The Chicago University Press, Chicago/Londres.
- Glashoff, K., 2002, "On Leibniz's Characteristic Numbers", *Studia Leibnitiana*, vol. 34, no. 2, p. 161–184.
- Gödel, K., 1944, "La lógica matemática de Russell", en *Obras completas*, trad. Jesús Mosterín, Alianza, Madrid, pp. 313–343.
- Iommi, G., 1999–2000, "Leibniz o el sistema en suspenso", *Philosophica*, nos. 22–23, pp. 97–112.
- Jolley, N., 1993, "Leibniz: Truth, Knowledge and Metaphysics", en G.H.R. Parkinson, *Routledge History of Philosophy*, vol. IV: *The Renaissance and Seventeenth-Century Rationalism*, Routledge, Londres/Nueva York, pp. 384–423.
- Kneale, W. y M. Kneale, 1962, *The Development of Logic*, Oxford University Press, Londres.
- Leibniz, G.W., 1989, *Filosofía para princesas*, trad. Javier Echeverría, Alianza, Madrid.
- Lenzen, W., 2004, "Leibniz's Logic", en D. Gabbay y J. Woods, *Handbook of the History of Logic*, vol. 3, Elsevier North Holland, Amsterdam, pp. 1–84.
- Nuchelmans, G., 1998, "Proposition and Judgement", en D. Garber y M. Ayers, *The Cambridge History of Seventeenth-Century Philosophy*, vol. I, Cambridge University Press, Nueva York, pp. 118–131.
- Poincaré, H., 2001, *The Value of Science: Essential Writings of Henri Poincaré*, The Modern Library, Nueva York.
- , 1927, *La Science et l'hypothèse*, Flammarion, París.
- Rauzy, J.-B., 2001, *La Doctrine leibnizienne de la vérité: aspects logiques et ontologiques*, Librairie Philosophique J. Vrin, París.
- Russell, B., 1972 [1903], *The Principles of Mathematics*, George Allen and Unwin, Londres.
- Rutherford, D., 1995, *Leibniz and the Rational Order of Nature*, Cambridge University Press, Nueva York.
- Serres, M., 1968, *Le Système de Leibniz et ses modèles mathématiques*, Presses Universitaires de France, París, 2 vols.
- Tarski, A., 1965 [1941], *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*, trad. Olaf Helmer, Oxford University Press, Nueva York.
- Weyl, H., 1959, *Filosofía de las matemáticas y de la ciencia natural*, trad. Carlos Imaz, Centro de Estudios Filosóficos-UNAM, México, 1965.
- Wilson, C., 1989, *Leibniz's Metaphysics: A Historical and Comparative Study*, Princeton University Press, Princeton.

Recibido el 6 de febrero de 2009; aceptado el 14 de octubre de 2009.